МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ

ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

(для студентов химических специальностей)

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2026

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций.

Предлагаемая Вашему вниманию серия пособий содержит описание части курса лекций по линейной алгебре, посвящённой евклидовым пространствам, многие годы читавшегося на химическом факультета МГУ им. М.В. Ломоносова и образцы решений типовых задач по этой теме.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче ими экзаменов и зачётов.

4. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

4.1. Вещественное (действительное) евклидово пространство

Рассмотрим векторное пространство V над $\mathbb{R}$.

Определение. Говорят, что в V введено ***скалярное произведение***, если указано правило, сопоставляющее любой паре $\bar{x}, \bar{y} \in V$ число, обозначаемое $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}$, и это правило подчиняется следующим законам:

1) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$;
2) $(\bar{x}_1 + \bar{x}_2, \bar{y}) = (\bar{x}_1, \bar{y}) + (\bar{x}_2, \bar{y})$;
3) $(\lambda\bar{x}, \bar{y})=\lambda(\bar{x}, \bar{y})$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$;
4) $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$ для все $\bar{x}$, причем $(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow x = \bar{0}$.

Определение. Пространство V со скалярным произведением называется ***евклидовым пространством.***

Приведем примеры евклидовых пространств:

1. Плоскость $\mathbb{R}^2$ – евклидово пространство, в нем скалярное произведение определено равенством $(\bar{x}, \bar{y}) = |\bar{x}||\bar{y}|cos\varphi$, где $|\bar{x}|, |\bar{y}|$ – длины векторов, φ – угол между ними.
   Свойства 1–4 скалярного произведения выполняются.

2. Пространство $\mathbb{R}^3$ с тем же определением скалярного произведения – евклидово пространство.
3. Рассмотрим пространство (бесконечномерное) $C[a, b]$, $a < b$ и введем на нем скалярное произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ равенством:
   $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$

Свойства 1–3 очевидны (это простые следствия свойств интеграла), также очевидно, что $\int_a^b f^2(x)dx \geq 0$.

Проверить требуется лишь то, что если $f(x) \in C[a,b]$ и $\int_a^b f^2(x)dx = 0$, то для всех x из $[a,b]$ $f(x) = 0$.

►Действительно, если бы существовала точка $c \in [a,b]$ такая, что $f(c) \neq 0$, то $|f^2(\mathrm{c})| > 0$, обозначим это число k.

Ввиду непрерывности функции $f(x)$, непрерывна функция $f^2(x)$, следовательно существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in [a,b]$, что $|x-c| < \delta$ выполняется неравенство $|f^2(x)| > k/2$. Для простоты изложения считаем, что $c \in (a,b)$ и что $a < c-\delta < c+\delta < b$.

Тогда

$$0 = \int_a^b f^2(x)dx = \int_a^{c-\delta} f^2(x)dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f^2(x)dx + \int_{c+\delta}^{b} f^2(x)dx \geq$$

$$\geq 0 + 2\delta \cdot \frac{k}{2} + 0 = \delta k > 0.$$

Полученное противоречие (то есть неравенство $0 \geq \delta K > 0$) доказывает наше утверждение.◄

Замечание 1. Пример 3 доказал, что скалярное произведение векторов, как, впрочем, и сами векторы, могут иметь различную природу, и что не стоит сводить это понятие только к геометрически наглядным образам.

Замечание 2. В курсе аналитической геометрии скалярное произведение (см. примеры 1 и 2) определялось через длины векторов и угол между ними. Затем были получены формулы, выражающие длины векторов и угол между ними через скалярное произведение. Это позволяет нам ввести понятие длины вектора и угла между векторами в пространствах, элементы которых не имеют наглядных геометрических образов.

1. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ и введем в нем скалярное произведение векторов $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$ по формуле

   $$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \tag{4.1}$$

   Свойство 1 скалярного произведения, определенного формулой (4.1), очевидно. Пусть $\bar{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $\bar{x}^{(2)} = (x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$,

   тогда

$$(\bar{x}^{(1)} + \bar{x}^{(2)}, \bar{y}) = (x_1^{(1)} + x_2^{(1)})y_1 + \dots + \left(x_n^{(1)} + x_n^{(2)}\right) y_n = x_1^{(1)} y_1 + \dots + x_n^{(1)} y_n +$$

$$+ x_1^{(2)} y_1 + \dots + x_n^{(2)} y_n = (\bar{x}^{(1)}, \bar{y}) + (\bar{x}^{(2)}, \bar{y})$$

и

$$(\lambda\bar{x},\bar{y}) = \lambda x_1 y_1 + \dots + \lambda x_n y_n = \lambda(\bar{x},\bar{y}).$$

Наконец,

$$(\bar{x},\bar{x}) = x_1^2 + \dots + x_n^2. \qquad (4.2)$$

и очевидно, что правая часть (4.2) всегда неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда $x_1 = \dots = x_n = 0$.

4.2. Неравенство Коши – Буняковского и его следствия

Следующая теорема справедлива в любом евклидовом пространстве.

Теорема 4.1. Для любых $\bar{x},\bar{y} \in V$, где V – любое евклидово пространство, выполнено неравенство:

$$(\bar{x},\bar{y})^2 \le (\bar{x},\bar{x})(\bar{y},\bar{y}), \qquad (4.3)$$

называемое ***неравенством Коши – Буняковского***.

► Для любого $t \in \mathbb{R}$ и любых $\bar{x},\bar{y} \in V$, по свойству 4 скалярного произведения, имеем:

$$(t\bar{x} - \bar{y}, t\bar{x} - \bar{y}) \ge 0.$$

Раскрывая левую часть этого неравенства по свойствам 1−3 скалярного произведения, получаем:

$$t^2(\bar{x},\bar{x}) - 2t(\bar{x},\bar{y}) + (\bar{y},\bar{y}) \ge 0, \qquad (4.4)$$

причем неравенство (4.4) выполняется для любого t. В случае, когда $(\bar{x},\bar{x}) = 0$ имеем $\bar{x} = \bar{0}$, поэтому неравенство (4.3) переходит в очевидное неравенство $0 \le 0$.

Если же $(\bar{x},\bar{x}) > 0$, то неотрицательность при всех t квадратного трехчлена в левой части (4.4) равносильна тому, что дискриминант этого трехчлена меньше или равен 0, то есть

$$4(\bar{x},\bar{y})^2 - 4(\bar{x},\bar{x})(\bar{y},\bar{y}) \le 0$$

что и утверждается в (4.3). ◄

Определение. Если каждому вектору $\bar{x} \in V$ сопоставлено число, называемое ***нормой вектора*** $\bar{x}$, обозначаемое $\|x\|$ и обладающее свойствами:

1. $\|\bar{x}\| > 0$ для любого $\bar{x} \in \mathrm{V}, \bar{x} \ne \bar{0}$; $\|\bar{0}\| = 0$
2. Для любого $\bar{x} \in V$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$

$\|\lambda\bar{x}\| = |\lambda|\|\bar{x}\|$;

3. Для любых $\bar{x}, \bar{y} \in V$

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \le \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|; \tag{4.5}$$

то пространство V называется ***линейным нормированным пространством.***

Замечание 1. Слова ***норма вектора*** имеют тот же смысл, что и слова ***длина вектора.*** В книгах встречается оба эти варианта.

Замечание 2. Неравенство (4.5) называют ***неравенством треугольника*** (или ***неравенством Минковского***).

Теорема 4.2. Если V – евклидово пространство, то в нем можно определить норму вектора равенством

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}. \tag{4.6}$$

Свойство 1 нормы сразу следует из свойства 4 скалярного произведения.

Свойство 2 получается из определения (4.6):

$$\|\lambda\bar{x}\| = \sqrt{(\lambda\bar{x}, \lambda\bar{x})} = \sqrt{\lambda^2(\bar{x}, \bar{x})} = |\lambda|\sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} = |\lambda|\|\bar{x}\|.$$

Для проверки свойства 3 воспользуемся теоремой 4.1:

►По определению,

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| = \sqrt{(\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y})} = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x}) + 2(\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{y}, \bar{y})} \tag{4.7}$$

Неравенство (4.3) перепишем в виде:

$$\|(\bar{x}, \bar{y})\| \le \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}\sqrt{(\bar{y}, \bar{y})} = \|\bar{x}\|\|\bar{y}\| \tag{4.8}$$

Тогда из (4.7) получаем:

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \le \sqrt{(\bar{x}, \bar{x}) + 2\sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}\sqrt{(\bar{y}, \bar{y})} + (\bar{y}, \bar{y})} =$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} + \sqrt{(\bar{y}, \bar{y})}\right)^2} = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} + \sqrt{(\bar{y}, \bar{y})} = \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\| \blacktriangleleft$$

Следствие. В любом вещественном евклидовом пространстве V можно ввести понятие угла между векторами $\bar{x}, \bar{y} \in V$.

►По аналогии с $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$определим ***угол φ между векторами*** $\bar{x}$ и $\bar{y}$, как угол, величина которого лежит между числами 0 и π, и косинус которого равен числу

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{x},\bar{y})}{\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|}\,.$$

Ввиду неравенства (4.8) модуль правой части этого равенства не превосходит единицы. Поэтому такой угол можно найти.◄

Определение. Назовем ***векторы*** $\bar{x}, \bar{y} \in V$ ***ортогональными*** (то есть ***перпендикулярными***), если

$$(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

В случае отличных от нуля векторов $\bar{x}, \bar{y}$

формула $\cos\varphi = \frac{(\bar{x},\bar{y})}{\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|}$ при этом дает: $\cos\varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Теорема 4.3 (Пифагора).

Если $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in V$ попарно ортогональны, то есть если $(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = 0$ при $i \neq j$, то

$$\|\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_n\|^2 = \|\bar{x}_1\|^2 + \dots + \|\bar{x}_n\|^2. \qquad (4.9)$$

►Действительно,

$$\|\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_n\|^2 = (\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_n, \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_n) = (\bar{x}_1, \bar{x}_1) + (\bar{x}_2, \bar{x}_2) + \dots +$$
$$+(\bar{x}_n, \bar{x}_n) + 2((\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \dots + (\bar{x}_1, \bar{x}_n) + (\bar{x}_2, \bar{x}_3) + \dots (\bar{x}_2, \bar{x}_n) + \dots +$$
$$+(\bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n) = (\bar{x}_1, \bar{x}_1) + \dots + (\bar{x}_n, \bar{x}_n) = \|\bar{x}_1\|^2 + \dots + \|\bar{x}_n\|^2.$$

Здесь использовались свойства скалярного произведения и равенства

$(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = 0$,

справедливые при $i \neq j$.◄

Следствие. Если $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, то (4.9) принимает вид:

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2.$$

(При этом естественно называть $\bar{x}, \bar{y}$ – катетами прямоугольного треугольника, а $\bar{x} + \bar{y}$ − его гипотенузой).

Полезно записать неравенства Коши – Буняковского и неравенство треугольника в разных конкретных евклидовых пространствах.

В $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ они принимают вид:

$$(\bar{a},\bar{b})^2 \le |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2,$$

$$|\bar{a}+\bar{b}| \le |\bar{a}| + |\bar{b}|.$$

В этом случае ***норма – это обычная длина*** вектора.

В пространстве $C[a,b]$ неравенство Коши – Буняковского имеет вид:

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)dt\right)^2 \le \int_a^b x^2(t)dt \int_a^b y^2(t)dt.$$

А неравенство треугольника имеет вид:

$$\sqrt{\int_a^b \big(x(t)+y(t)\big)^2 dt} \le \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt} + \sqrt{\int_a^b y^2(t)dt}.$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ неравенство Коши – Буняковского выглядит так:

$$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \le (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

Или, используя знак суммы:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Неравенство треугольника, соответственно, имеет вид

$$\sqrt{(x_1+y_1)^2 + \cdots + (x_n+y_n)^2} \le \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

или

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

4.3. Ортонормированный базис евклидова пространства

Когда мы рассматриваем векторное пространство, не наделенное структурой евклидова пространства, все базисы V равноправны. Другое дело – евклидово пространство. Вспомним особую роль прямоугольной декартовой системы в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$и, например, базис

$$\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$$

пространства $\mathbb{R}^3$. В этом базисе формулы для вычисления скалярного произведения и, следовательно, длин векторов и углов между ними выглядели особенно просто. В n-мерном евклидовом пространстве тоже можно выбрать базис, обладающий подобными свойствами.

Определение. ***Базис*** $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ пространства V называется ***ортонормированным,*** если $\|\bar{e}_i\| = 1, i = 1, \dots, n$ и $(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = 0$ при $i \neq j$.

Теорема 4.4. Векторы $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$, для которых $\|\bar{e}_i\| = 1, i = 1, \dots, n$ и $(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = 0$ при $i \neq j$, линейно независимы.

►Если $c_1\bar{e}_1 + \dots + c_n\bar{e}_n = \bar{0}$, то для любого $i,\ i = 1, \dots, n$

$(c_1\bar{e}_1, \dots, c_n\bar{e}_n, \bar{e}_i) = c_1(\bar{e}_1, \bar{e}_i) + \dots + c_i(\bar{e}_{i,}\bar{e}_i) + \dots + c_n(\bar{e}_n, \bar{e}_i) =$
$= 0 + \dots + +c_i(\bar{e}_i, \bar{e}_i) + \dots + 0 = 0 \Rightarrow c_i(\bar{e}_{i,}\bar{e}_i) = 0$ и, так как $(\bar{e}_{i,}\bar{e}_i) \neq 0$, то $c_i = 0, i = 1, \dots, n$.◄

Теорема 4.5. Во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

►Пусть $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$ – базис V, тогда $\bar{f}_1 \neq \bar{0}$, так как $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$ линейно независимы. Положим

$\bar{e}_1 = \frac{\bar{f}_1}{\|\bar{f}_1\|}$.

Тогда $\|\bar{e}_1\| = 1$.

Выберем число α так, чтобы вектор $\bar{f}_2 - \alpha_1\bar{e}_1$ был ортогонален $\bar{e}_1$, то есть чтобы выполнялось равенство

$(\bar{f}_2 - \alpha_{11}\bar{e}_1, \bar{e}_1) = (\bar{f}_2, \bar{e}_1) - \alpha_{11}(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = (\bar{f}_2, \bar{e}_1) - \alpha_{1,1} = 0.$

Таким образом, $(\bar{f}_2, \bar{e}_1) = \alpha_{11}$. При этом $\bar{f}_2 - \alpha_{11}\bar{e}_1 \neq \bar{0}$, иначе векторы $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$ были бы линейно зависимы. Положим

$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{f}_2 - \alpha_{11}\bar{e}_1}{\|\bar{f}_2 - \alpha_{11}\bar{e}_1\|}.$$

При всех этих преобразованиях набор векторов $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$ переходил в эквивалентный набор векторов.

Выберем числа α_{21}, α_{22} так, чтобы вектор $\bar{f}_3 - \alpha_{21}\bar{e}_1 - \alpha_{22}\bar{e}_2$ был ортогонален векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. Это означает, что:

$(\bar{f}_3 - \alpha_{21}\bar{e}_1 - \alpha_{22}\bar{e}_2, \bar{e}_1) = (\bar{f}_3, \bar{e}_1) - \alpha_{21}(\bar{e}_1, \bar{e}_1) - \alpha_{22}(\bar{e}_2, \bar{e}_1) =$
$= (\bar{f}_3, \bar{e}_1) - \alpha_{21} - 0 = 0,$

$\alpha_{21} = (\bar{f}_3, \bar{e}_1),$

$(\bar{f}_3 - \alpha_{21}\bar{e}_1 - \alpha_{22}\bar{e}_2, \bar{e}_2) = (\bar{f}_3, \bar{e}_2) - \alpha_{21}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) - \alpha_{22}(\bar{e}_2, \bar{e}_2) =$
$= (\bar{f}_3, \bar{e}_2) - \alpha_{22} = 0,$

$\alpha_{22} = (\bar{f_3}, \bar{e}_2)$.

Если $3 < n$, то $\bar{f_3} - \alpha_{21}\bar{e}_1 - \alpha_{22}\bar{e}_2 \neq \bar{0}$, иначе векторы $\bar{f_1}, \bar{f_2}, \bar{f_3}$ были бы линейно зависимы.

Полагаем:

$$\bar{e_3} = \frac{\bar{f_3} - \alpha_{21}\bar{e}_1 - \alpha_{22}\bar{e}_2}{\|\bar{f_3} - \alpha_{21}\bar{e}_1 - \alpha_{22}\bar{e}_2\|}.$$

Продолжаем этот процесс, на k-м шаге ищем $\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{kk}$ так, чтобы вектор $\bar{f}_{k+1} - \alpha_{k1}\bar{e}_1 - \dots - \alpha_{kk}\bar{e}_k$

был ортогонален всем векторам $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k$, что означает, как и в рассмотренных выше случаях, что выполнены равенства $\alpha_{kl} = (\bar{f}_{k+1}, \bar{e}_l), l =, \dots, k$. Полагаем, при $k \leq n - 1$,

$$\bar{e}_{k+1} = \frac{\bar{f}_{k+1} - \alpha_{k1}\bar{e}_1 - \dots - \alpha_{kk}\bar{e}_k}{\|\bar{f}_{k+1} - \alpha_{k1}\bar{e}_1 - \dots - \alpha_{kk}\bar{e}_k\|}. \qquad (4.10)$$

(снова при $k \leq n - 1$ вектор $\bar{f}_{k+1} - \alpha_{k1}\bar{e}_1 - \dots - \alpha_{kk}\bar{e}_k \neq \bar{0}$).

В результате, при $k = n - 1$ по формуле (4.10) будет построен последний вектор $\bar{e}_n$. По предыдущей теореме, $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ линейно независимы. Искомый ортонормированный базис построен◄

Замечание. Процесс, использованный в предыдущей теореме, называется процессом Гильберта – Шмидта. Его можно применять не только для ортогонализации базиса пространства, но и для ортогонализации любой системы векторов. В результате будет получаться максимальная линейно независимая подсистема этих векторов, причем ортогональная. Следует обратить внимание на то, что при рассмотрении произвольной системы векторов, процесс ортогонализации может давать (в случае линейной зависимости исходных векторов) нулевые векторы. Их мы отбрасываем.

Теорема 4.6. Если $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ – ортонормированный базис, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$ то скалярное произведение этих векторов вычисляется по формуле

$$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

►$(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n, y_1\bar{e}_1 + \dots + y_n\bar{e}_n) = (x_1\bar{e}_1, y_1\bar{e}_1 + \dots + y_n\bar{e}_n) + (x_2\bar{e}_2, y_1\bar{e}_1 + \dots + y_n\bar{e}_n) = + (x_n\bar{e}_n, y_1\bar{e}_1 + \dots + y_n\bar{e}_n) = x_1(\bar{e}_1, y_1\bar{e}_1 + \dots + y_n\bar{e}_n) + x_2(\bar{e}_2, y_1\bar{e}_1 + \dots + y_n\bar{e}_n) = + x_n(\bar{e}_n, y_1\bar{e}_1 + \dots + y_n\bar{e}_n) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$.

Мы воспользовались тем, что $(\bar{e}_i, \bar{e}_i) = 1,\ i = 1, \dots, n$, равенствами $(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = 0$ при $i \neq j$ и свойствами скалярного произведения◄

Следствие. Если $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ – ортонормированный базис и

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n,$$

то для любого $l,\ l = 1, \dots, n$ выполнено равенство $x_l = (\bar{x}, \bar{e_l})$.

4.4. Ортогональное дополнение подпространства евклидова пространства

Пусть L — некоторое подпространство евклидова пространства V.

Определение. Множество векторов $\bar{x} \in V$, ортогональных любому вектору из L, называется ***ортогональным дополнением подпространства*** L и обозначается $L^{\perp}$.

Теорема 4.7. Ортогональное дополнение $L^{\perp}$ подпространства L размерности r евклидова пространства V размерности n само является подпространством пространства V и имеет размерность $n - r$.

► По теореме 2.10 любое подпространство L является линейной оболочкой некоторых линейно независимых векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$ и пусть эти векторы имеют в некотором ортонормированном базисе пространства V координаты

$\bar{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}), i = 1, \dots, r.$ (4.11)

Условие, что вектор $\bar{x} \in V$, имеющий в том же базисе координаты $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, ортогонален любому вектору из подпространства L равносильно тому, что этот вектор ортогонален всем векторам $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$. Это условие можно записать в виде

$$(\bar{a}_i, \bar{x}) = 0, i = 1, \dots, r. \qquad (4.12)$$

В свою очередь, эти равенства означают, что вектор $\bar{x}$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (4.13)$$

По условию, ранг матрицы A этой системы равен числу r. Множество решений этой системы является подпространством и имеет размерность $n - r$. Теорема доказана◄

Следствие. Любое подпространство L является множеством решений некоторой системы линейных однородных уравнений.

►Действительно, рассмотрим фундаментальную систему решений системы (4.13).

Пусть она состоит из векторов

$\bar{b}_j = (b_{1,j}, \dots, b_{n,j}), j = 1, \dots, n - r.$ (4.14)

Равенства (4.12) выполнены при подстановке вместо вектора $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ любого из векторов $\bar{b}_j, j = 1, \dots, n - r$, то есть выполнены равенства

$$\begin{cases} a_{11}b_{1,j} + \cdots + a_{1n}b_{n,j} = 0, \\ \quad \dots \\ a_{r1}b_{1.j} + \cdots + a_{rn}b_{n,j} = 0. \end{cases} \quad j = 1, \dots, n - r.$$

Но эти равенства означают, в свою очередь, что векторы

$\bar{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}), i = 1, \dots, r$

являются решениями системы линейных уравнений

$$\begin{cases} b_{11}y_1 + \cdots + b_{1n}y_n = 0, \\ \quad \dots \\ b_{n-r,1}y_1 + \cdots + b_{n-r,n}y_n = 0. \end{cases} \tag{4.15}$$

Так как $\bar{b}_j, j = 1, \dots, n - r$ линейно независимы, ранг матрицы этой системы равен $n - r$. Поэтому размерность пространства решений равна r. Так как векторы $\bar{a}_i, i = 1, \dots, r$ линейно независимы, они образуют фундаментальную систему решений этой системы и, следовательно, множество решений этой системы совпадает с подпространством L◄

Замечание. Следствие выполняется в любом конечномерном, не обязательно евклидовом, пространстве.

► Действительно, множеством решений системы (4.15) с матрицей В**,** строками которой являются векторы (4.14), составляющие фундаментальную систему решений системы уравнений (4.13), является линейная оболочка векторов (4.11), то есть подпространство L◄

Замечание. Следствие даёт алгоритм решения такой задачи: заданы две совокупности векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k$ и $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_l$. Требуется найти пересечение подпространств, натянутых на эти векторы. Для решения задачи можно выписать системы уравнений, задающих эти подпространства и объединить их в одну систему уравнений. Множество её решений является искомым пересечением.

Итак, процесс ортогонализации системы векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ – это переход к новой системе векторов $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n$ по правилу:

$\bar{b}_1 = \bar{a}_1$, ..., $\bar{b}_k = \bar{a}_k - \frac{(\bar{a}_k, \bar{b}_1)}{(\bar{b}_1, \bar{b}_1)}\bar{b}_1 - \cdots - \frac{(\bar{a}_k, \bar{b}_{k-1})}{(\bar{b}_{k-1}, \bar{b}_{k-1})}\bar{b}_{k-1}.$

Замечание. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны, то векторы $\bar{a}$ и $c\bar{b}$, также будут ортогональны. Поэтому в систему $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n$ можно брать вместо вектора $\bar{b}_k$ вектор $c\bar{b}_k$, чтобы не затруднять себя работой с дробями.

4.5. Решение задач

4.5.1. Задачи, связанные с процессом ортогонализации системы векторов

Задача 1.1. Ортогонализовать систему векторов

$\bar{a}_1 = (1,2,2,-1),\ \bar{a}_2 = (1,1,-5,3),\ \bar{a}_3 = (3,2,8,-7).$

Решение.

$\bar{b}_1 = \bar{a}_1 = (1,2,2,-1).$

$$\bar{b}_2 = \bar{a}_2 - \frac{(\bar{a}_2,\bar{b}_1)}{(\bar{b}_1,\bar{b}_1)}\bar{b}_1 = (1,2,-5,3) - \frac{1+2-10-3}{(1+4+4+1)}(1,2,2,-1) =$$
$$= (1,2,-5,3) - \frac{-10}{10}(1,2,2,-1) = (1,2,-5,3) + (1,2,2,-1) =$$
$$= (1,1,-5,3) + (1,2,2,-1) = (2,3,-3,2)$$

$\Longrightarrow \bar{b}_2 = (2,3,-3,2).$

$$\bar{b}_3 = \bar{a}_3 - \frac{(\bar{a}_3,\bar{b}_1)}{(\bar{b}_1,\bar{b}_1)}\bar{b}_1 - \frac{(\bar{a}_3,\bar{b}_2)}{(\bar{b}_2,\bar{b}_2)}\bar{b}_2 =$$
$$= (3,2,8,-7) - \frac{3+4+16+7}{10}(1,2,2,-1) - \frac{6+6-24-14}{4+9+9+4}(2,3,-3,2) =$$
$$= (3,2,8,-7) - \frac{30}{10}(1,2,2,-1) - \frac{-26}{26}(2,3,-3,2) =$$
$$= (3,2,8,-7) - 3(1,2,2,-1) + (2,3,-3,2) = (2,-1,-1,-2)$$

$\Longrightarrow \bar{b}_3 = (2,-1,-1,-2).$

Ответ: $\bar{b}_1 = (1,2,2,-1),\ \bar{b}_2 = (2,3,-3,2),\ \bar{b}_3 = (2,-1,-1,-2).$

Задача 1.2. Ортогонализовать систему векторов

$\bar{a}_1 = (1,1,-1,-2),\ \bar{a}_2 = (5,8,-2,-3),\ \bar{a}_3 = (3,9,3,8).$

Решение.

$\bar{b}_1 = \bar{a}_1 = (1,1,-1,-2).$

$$\bar{b}_2 = \bar{a}_2 - \frac{(\bar{a}_2,\bar{b}_1)}{(\bar{b}_1,\bar{b}_1)}\bar{b}_1 = (5,8,-2,-3) - \frac{5+8+2+6}{(1+1+1+4)}(1,1,-1,-2) =$$
$$= (5,8,-2,-3) - \frac{21}{7}(1,1,-1,-2) = (5,8,-2,-3) - 3(1,1,-1,-2) =$$
$$= (2,5,1,3).$$

$\Longrightarrow \bar{b}_2 = (2,5,1,3).$

$\bar{b}_3 = \bar{a}_3 - \frac{(\bar{a}_3,\bar{b}_1)}{(\bar{b}_1,\bar{b}_1)}\bar{b}_1 - \frac{(\bar{a}_3,\bar{b}_2)}{(\bar{b}_2,\bar{b}_2)}\bar{b}_2 =$
$= (3,9,3,8) - \frac{3+9-3-16}{7}(1,1,-1,-2) - \frac{6+45+3+24}{4+25+1+9}(2,5,1,3) =$
$= (3,9,3,8) - \frac{-7}{7}(1,1,-1,-2) - \frac{78}{39}(2,5,1,3) =$
$= (3,9,3,8) + (1,1,-1,-2) - 2(2,5,1,3) = (0,0,0,0).$

$\Rightarrow \bar{b}_3 = \bar{0}.$

Напомним, что это означает, что система $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ была линейно зависима, и в качестве ортогональной системы мы получим только два вектора (нулевой вектор отбрасывается).

Ответ: $\bar{b}_1 = (1,1,-1,-2)$, $\bar{b}_2 = (2,5,1,3)$.

Задача 1.3. Посредством процесса ортогонализации найти ортогональный базис пространства, порожденного векторами

$\bar{a}_1 = (1,2,1,3)$, $\bar{a}_2 = (4,1,1,1)$, $\bar{a}_3 = (3,1,1,0)$.

Решение.

В этой задаче также требуется ортогонализовать систему векторов (линейные оболочки векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ и векторов $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ будут совпадать).

$\bar{b}_1 = \bar{a}_1 = (1,2,1,3).$

Рассмотрим вектор

$\bar{a}_2 - \frac{(\bar{a}_2,\bar{b}_1)}{(\bar{b}_1,\bar{b}_1)}\bar{b}_1 = (4,1,1,1) - \frac{4+2+1+3}{(1+4+1+9)}(1,2,1,3) = (4,1,1,1) - \frac{10}{15}(1,2,1,3) =$
$= (4,1,1,1) - \frac{2}{3}(1,2,1,3).$

В качестве $\bar{b}_2$ возьмем вектор

$\bar{b}_2 = 3\left(\bar{a}_2 - \frac{(\bar{a}_2,\bar{b}_1)}{(\bar{b}_1,\bar{b}_1)}\bar{b}_1\right) = 3 \cdot \left((4,1,1,1) - \frac{2}{3}(1,2,1,3)\right) =$
$= (12,3,3,3) - (2,4,2,6) = (10,-1,1,-3).$

(Мы здесь в качестве вектора $\bar{b}_2$ взяли утроенный вектор, который получался в процессе ортогонализации.)

$\Rightarrow \bar{b}_2 = (10,-1,1,-3).$

Рассмотрим вектор

$\bar{a}_3 - \frac{(\bar{a}_3,\bar{b}_1)}{(\bar{b}_1,\bar{b}_1)}\bar{b}_1 - \frac{(\bar{a}_3,\bar{b}_2)}{(\bar{b}_2,\bar{b}_2)}\bar{b}_2 =$
$= (3,1,1,0) - \frac{3+2+1}{15}(1,2,1,3) - \frac{30-1+1}{100+1+1+9}(10,-1,1,-3) =$

$$= (3,1,1,0) - \frac{6}{15}(1,2,1,3) - \frac{30}{111}(10,-1,1,-3) =$$
$$= (3,1,1,0) - \frac{2}{5}(1,2,1,3) - \frac{10}{37}(10,-1,1,-3).$$

В качестве $\bar{b}_3$ возьмем вектор

$$\bar{b}_3 = 5 \cdot 37 \cdot \left((3,1,1,0) - \frac{2}{5}(1,2,1,3) - \frac{10}{37}(10,-1,1,-3)\right) =$$
$$= 185(3,1,1,0) - 74(1,2,1,3) - 50(10,-1,1,-3) =$$
$$= (555,185,185,0) - (74,148,74,222) - (500,-50,50,-150) =$$
$$= (-19,87,61,-72).$$

$$\Longrightarrow \bar{b}_3 = (-19,87,61,-72).$$

Ответ: $\bar{b}_1 = (1,2,1,3)$, $\bar{b}_2 = (10,-1,1,-3)$, $\bar{b}_3 = (-19,87,61,-72)$.

Задача 1.4. Проверить, что векторы $\bar{a}_1 = (1,-2,2,-3)$ и $\bar{a}_2 = (2,-3,2,4)$ ортогональны и дополнить их до ортогонального базиса.

Решение.

Скалярное произведение векторов $\bar{a}_1 = (1,-2,2,-3)$ и $\bar{a}_2 = (2,-3,2,4)$ равно

$$(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = 2 + 6 + 4 - 12 = 0,$$

следовательно, векторы ортогональны.

Заметим, что размерность пространства $n = 4$. Следовательно, нужно найти два вектора $\bar{a}_3$ и $\bar{a}_4$, которые будут ортогональны векторам $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ и будут ортогональны между собой. Следовательно, сначала надо найти решение системы

$$\begin{cases}(\bar{a}_1, \bar{x}) = 0\\(\bar{a}_2, \bar{x}) = 0,\end{cases}$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Но система является однородной. Значит, надо найти фундаментальную систему решений этой линейной системы, и полученную фундаментальную систему ортогонализовать.

Решим систему (найдем фундаментальную систему решений).

$$\begin{cases}x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0\\2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0.\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -3\\2 & -3 & 2 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -3\\0 & -1 & 2 & -10\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\begin{matrix}1 & 0\\0 & 1\end{matrix} & \begin{matrix}-2 & 17\\-2 & 10\end{matrix}\\ \underbrace{\qquad\quad}_{\text{зависимые}} & \underbrace{\qquad\quad}_{\text{независимые}}\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 17x_4 \\ x_2 = 2x_3 - 10x_4. \end{cases}$$

Получаем таблицу (и фундаментальную систему решений)

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\bar{y}_1$	2	2	1	0
$\bar{y}_2$	-17	-10	0	1

Итак, векторы $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ ортогональны векторам $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$. Но вовсе не обязательно они ортогональны между собой. Поэтому эту пару векторов надо ортогонализовать.

Положим

$\bar{a}_3 = \bar{y}_1 = (2,2,1,0)$.

Тогда

$$\bar{a}_4 = \bar{y}_2 - \frac{(\bar{y}_2, \bar{y}_1)}{(\bar{y}_1, \bar{y}_1)} \bar{y}_1 = (-17, -10,0,1) - \frac{-34-20}{4+4+1}(2,2,1,0) =$$
$$= (-17, -10,0,1) - \frac{-54}{9}(2,2,1,0) = (-17, -10,0,1) + 6(2,2,1,0) =$$
$$= (-5,2,6,1).$$

$\Longrightarrow \bar{a}_4 = (-5,2,6,1)$.

Ответ: можно добавить, например, $\bar{a}_3 = (2,2,1,0)$, $\bar{a}_4 = (-5,2,6,1)$.

Задача 1.5. Проверить, что векторы $\bar{a}_1 = (1,1,1,2)$ и $\bar{a}_2 = (1,2,3,-3)$ ортогональны и дополнить их до ортогонального базиса.

Решение.

Скалярное произведение векторов $\bar{a}_1 = (1,1,1,2)$ и $\bar{a}_2 = (1,2,3,-3)$ равно

$(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = 1 + 2 + 3 - 6 = 0$,

следовательно, векторы ортогональны.

Заметим, что размерность пространства $n = 4$. Следовательно, нужно найти два вектора $\bar{a}_3$ и $\bar{a}_4$, которые будут ортогональны векторам $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ и будут ортогональны между собой. Следовательно, сначала надо найти решение системы

$$\begin{cases} (\bar{a}_1, \bar{x}) = 0 \\ (\bar{a}_2, \bar{x}) = 0, \end{cases}$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Но система является однородной. Значит, надо найти фундаментальную систему решений этой линейной системы, и полученную фундаментальную систему ортогонализовать.

Решим систему (найдем фундаментальную систему решений).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 \\ \underbrace{0 \quad 1}_{\text{зависимые}} & & \underbrace{2 \quad -5}_{\text{независимые}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 5x_4. \end{cases}$$

Получаем таблицу (и фундаментальную систему решений)

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\bar{y}_1$	1	-2	1	0
$\bar{y}_2$	-7	5	0	1

Итак, векторы $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ ортогональны векторам $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$. Но вовсе не обязательно они ортогональны между собой. Поэтому эту пару векторов надо ортогонализовать.

Положим

$\bar{a}_3 = \bar{y}_1 = (1, -2, 1, 0).$

Рассмотрим вектор

$$\bar{y}_2 - \frac{(\bar{y}_2, \bar{y}_1)}{(\bar{y}_1, \bar{y}_1)} \bar{y}_1 = (-7,5,0,1) - \frac{-7-10}{1+4+1}(1, -2, 1, 0) =$$
$$= (-7,5,0,1) + \frac{17}{6}(1, -2, 1, 0).$$

В качестве $\bar{a}_4$ возьмем вектор

$$\bar{a}_4 = 6 \cdot \left((-7,5,0,1) + \frac{17}{6}(1, -2, 1, 0)\right) =$$
$$= 6(-7,5,0,1) + 17(1, -2, 1, 0) = (-25, -4, 17, 6).$$

$\Rightarrow \bar{a}_4 = (-25, -4, 17, 6).$

Ответ: можно добавить, например, $\bar{a}_3 = (1, -2, 1, 0)$, $\bar{a}_4 = (-25, -4, 17, 6)$.

Задача 1.6. Построить ортонормированный базис пространства, приняв за два вектора этого пространства векторы $\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $\bar{e}_2 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right)$.

Решение.

Скалярное произведение векторов $\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $\bar{e}_2 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right)$ равно

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} - \frac{5}{12} = 0,$$

следовательно, векторы ортогональны.

$$\|\bar{e}_1\| = \sqrt{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 1,$$

$$\|\bar{e}_2\| = \sqrt{(\bar{e}_2, \bar{e}_2)} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{4} + \frac{25}{36}} = 1.$$

Следовательно, векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ образуют ортонормированную систему.

Заметим, что размерность пространства $n = 4$. Следовательно, нужно найти два вектора $\bar{e}_3$ и $\bar{e}_4$, которые будут ортогональны векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, будут ортогональны между собой и их норма будет равна 1. Следовательно, сначала надо найти решение системы

$$\begin{cases} (\bar{e}_1, \bar{x}) = 0 \\ (\bar{e}_2, \bar{x}) = 0, \end{cases}$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Система является однородной. Значит, надо найти фундаментальную систему решений этой линейной системы, и полученную фундаментальную систему ортонормировать.

Решим систему (найдем фундаментальную систему решений).

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{6}x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = -x_1 - 4x_4 \\ x_3 = \qquad 3x_4. \end{cases}$$

В этом случае зависимыми переменными являются x_2 и x_3, а независимыми – x_1 и x_4.

Получаем таблицу (и фундаментальную систему решений)

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\bar{y}_1$	1	-1	0	0
$\bar{y}_2$	0	-4	3	1

Итак, векторы $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ ортогональны векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. Но вовсе не обязательно они ортогональны между собой. Поэтому эту пару векторов надо ортогонализовать.

Положим

$\bar{a}_3 = \bar{y}_1 = (1, -1,0,0)$.

Тогда

$\bar{a}_4 = \bar{y}_2 - \frac{(\bar{y}_2, \bar{y}_1)}{(\bar{y}_1, \bar{y}_1)} \bar{y}_1 = (0, -4,3,1) - \frac{4}{1+1}(1, -1,0,0) =$
$= (0, -4,3,1) - 2(1, -1,0,0) = (-2, -2,3,1)$.

$\Longrightarrow \bar{a}_4 = (-2, -2,3,1)$.

Векторы $\bar{a}_3$ и $\bar{a}_4$ вместе с $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ образуют ортогональную систему. Осталось нормировать векторы $\bar{a}_3$ и $\bar{a}_4$. Положим

$\bar{e}_3 = \frac{\bar{a}_3}{\|\bar{a}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{1+1}}(1, -1,0,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0,0\right)$

$\bar{e}_4 = \frac{\bar{a}_4}{\|\bar{a}_4\|} = \frac{1}{\sqrt{4+4+9+1}}(-2, -2,3,1) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-2, -2,3,1) = \left(\frac{-2}{3\sqrt{2}}, -\frac{-2}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$.

Ответ: можно добавить, например, $\bar{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0,0\right)$ и
$\bar{e}_4 = \left(\frac{-2}{3\sqrt{2}}, -\frac{-2}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$.

Задача 1.7. Разложить вектор $\bar{x} = (5,2, -2,2)$ в сумму двух векторов, один и з которых лежит в пространстве, натянутом на векторы $\bar{a}_1 = (2,1,1, -1)$ и $\bar{a}_2 = (1,1,3,0)$, а другой ортогонален этому пространству (то есть найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую).

Решение.

Отметим сразу, что векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ не ортогональны, действительно,

$(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = 2 + 1 + 3 + 0 = 6 \neq 0$.

По условию мы должны разложить вектор $\bar{x}$ в сумму

$\bar{x} = c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + \bar{a}_\perp$,

где вектор $\bar{a}_\perp$ ортогонален векторам $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$, то есть $(\bar{a}_\perp, \bar{a}_1) = 0$ и $(\bar{a}_\perp, \bar{a}_2) = 0$.

Умножим скалярно вектор $\bar{x} = c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + \bar{a}_\perp$ на векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$, получим:

$$(\bar{x}, \bar{a}_1) = (c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + \bar{a}_\perp, \bar{a}_1) = (c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2, \bar{a}_1) + (\bar{a}_\perp, \bar{a}_1) = \\ = c_1(\bar{a}_1, \bar{a}_1) + c_2(\bar{a}_2, \bar{a}_1),$$

$$(\bar{x}, \bar{a}_2) = (c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + \bar{a}_\perp, \bar{a}_2) = (c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2, \bar{a}_2) + (\bar{a}_\perp, \bar{a}_2) = \\ = c_1(\bar{a}_1, \bar{a}_2) + c_2(\bar{a}_2, \bar{a}_2),$$

так как $(\bar{a}_\perp, \bar{a}_1) = 0$ и $(\bar{a}_\perp, \bar{a}_2) = 0$, но $(\bar{a}_1, \bar{a}_2) \neq 0$.

Кроме того,

$(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = 6$,

$(\bar{a}_1, \bar{a}_1) = 4 + 1 + 1 + 1 = 7$,

$(\bar{a}_2, \bar{a}_2) = 1 + 1 + 9 + 0 = 11$,

$(\bar{x}, \bar{a}_1) = 10 + 2 - 2 - 2 = 8$,

$(\bar{x}, \bar{a}_2) = 5 + 2 - 6 + 0 = 1$.

Все вышеизложенное позволяет получить систему относительно c_1 и c_2:

$$\begin{cases} 7c_1 + 6c_2 = 8 \\ 6c_1 + 11c_2 = 1. \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 77 - 36 = 41$$

$$\Delta_{c_1} = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 88 - 6 = 82$$

$$\Delta_{c_2} = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 48 = -41$$

$$c_1 = \frac{\Delta_{c_1}}{\Delta} = \frac{82}{41} = 2$$

$$c_2 = \frac{\Delta_{c_2}}{\Delta} = \frac{-41}{41} = -1.$$

Поэтому проекция вектора $\bar{x}$ на линейную оболочку векторов $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ будет равна

$$c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 = 2(2,1,1,-1) - (1,1,3,0) = (3,1,-1,-2),$$

а ортогональная составляющая $\bar{a}_{\perp}$ будет равна

$\bar{a}_{\perp} = \bar{x} - (c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2) = (5,2,-2,2) - (3,1,-1,-2) = (2,1,-1,4).$

Ответ: Ортогональная проекция – вектор $(3,1,-1,-2)$,

Ортогональная составляющая – вектор $\bar{a}_{\perp} = (3,1,-1,-2)$.

Задача 1.8. Разложить вектор $\bar{x} = (-3,5,9,3)$ в сумму двух векторов, один из которых лежит в пространстве, натянутом на векторы
$\bar{a}_1 = (1,1,1,1)$ и $\bar{a}_2 = (2,-1,1,1)$, $\bar{a}_3 = (2,-7,-1,-1)$ а другой ортогонален этому пространству (то есть найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую).

Решение.

Отметим сразу, что векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ и $\bar{a}_3$ не ортогональны, а в последствии нам придется рассматривать скалярные произведения. Поэтому часто бывает полезно сначала ортогонализовать систему $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$.

$\bar{b}_1 = \bar{a}_1 = (1,1,1,1).$

Рассмотрим вектор

$$\bar{a}_2 - \frac{(\bar{a}_2,\bar{b}_1)}{(\bar{b}_1,\bar{b}_1)}\bar{b}_1 = (2,-1,1,1) - \frac{2-1+1+1}{(1+1+1+1)}(1,1,1,1) = (2,-1,1,1) - \frac{3}{4}(1,1,1,1).$$

В качестве $\bar{b}_2$ возьмем вектор

$$\bar{b}_2 = 4\left((2,-1,1,1) - \frac{3}{4}(1,1,1,1)\right) = (8,-4,4,4) - (3,3,3,3) = (5,-7,1,1).$$

$\Longrightarrow \bar{b}_2 = (5,-7,1,1).$

Рассмотрим вектор

$$\bar{b}_3 = \bar{a}_3 - \frac{(\bar{a}_3,\bar{b}_1)}{(\bar{b}_1,\bar{b}_1)}\bar{b}_1 - \frac{(\bar{a}_3,\bar{b}_2)}{(\bar{b}_2,\bar{b}_2)}\bar{b}_2 =$$
$$= (2,-7,-1,-1) - \frac{2-7-1-1}{4}(1,1,1,1) - \frac{10+49-1-1}{25+49+1+1}(5,-7,1,1) =$$
$$= (2,-7,-1,-1) + \frac{7}{4}(1,1,1,1) - \frac{57}{76}(5,-7,1,1) =$$
$$= (2,-7,-1,-1) + \frac{7}{4}(1,1,1,1) - \frac{3}{4}(5,-7,1,1) = (0,0,0,0).$$

То есть линейная оболочка векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ совпадает с линейной оболочкой векторов $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$, и при этом векторы $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$ – ортогональны.

По условию мы должны разложить вектор $\bar{x}$ в сумму

$$\bar{x} = \underbrace{c_1\bar{b}_1 + c_2\bar{b}_2}_{\bar{b}} + \bar{b}_\perp,$$

где вектор $\bar{b}_\perp$ ортогонален векторам $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$, то есть $(\bar{b}_\perp, \bar{b}_1) = 0$ и $(\bar{b}_\perp, \bar{b}_2) = 0$.

Умножим скалярно вектор $\bar{x} = c_1\bar{b}_1 + c_2\bar{b}_2 + \bar{b}_\perp$ на векторы $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$, получим:

$$(\bar{x}, \bar{b}_1) = (c_1\bar{b}_1 + c_2\bar{b}_2 + \bar{b}_\perp, \bar{b}_1) = c_1(\bar{b}_1, \bar{b}_1) + c_2(\bar{b}_2, \bar{b}_1) + (\bar{b}_\perp, \bar{b}_1) =$$
$$= c_1(\bar{b}_1, \bar{b}_1),$$

$$(\bar{x}, \bar{b}_2) = (c_1\bar{b}_1 + c_2\bar{b}_2 + \bar{b}_\perp, \bar{b}_2) = c_1(\bar{b}_1, \bar{b}_2) + c_2(\bar{b}_2, \bar{b}_2) + (\bar{b}_\perp, \bar{b}_2) =$$
$$= c_2(\bar{b}_2, \bar{b}_2).$$

Кроме того,

$$(\bar{b}_1, \bar{b}_1) = 4,$$

$$(\bar{b}_2, \bar{b}_2) = 76,$$

$$(\bar{x}, \bar{b}_1) = -3 + 5 + 9 + 3 = 14,$$

$$(\bar{x}, \bar{b}_2) = -15 - 35 + 9 + 3 = -38.$$

Все вышеизложенное позволяет получить очень простую систему относительно c_1 и c_2:

$$\begin{cases} 4c_1 = 14 \\ 76c_2 = -38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{7}{2} \\ c_2 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Поэтому проекция $\bar{b}$ вектора $\bar{x}$ на линейную оболочку векторов $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$ будет равна

$$\bar{b} = c_1\bar{b}_1 + c_2\bar{b}_2 = \frac{7}{2}(1,1,1,1) - \frac{1}{2}(5,-7,1,1) = (1,7,3,3).$$

а ортогональная составляющая $\bar{b}_\perp$ будет равна

$$\bar{b}_\perp = \bar{x} - \bar{b} = (-3,5,9,3) - (1,7,3,3) = (-4,-2,6,0).$$

Ответ: Ортогональная проекция – вектор $\bar{b} = (1,7,3,3)$,

Ортогональная составляющая – вектор $\bar{b}_\perp = (-4,-2,6,0)$.

Задача 1.9. Найти наименьший угол между вектором $\bar{x} = (1,3,-1,3)$ и подпространством, натянутым на векторы $\bar{a}_1 = (1,-1,1,1)$ и $\bar{a}_2 = (5,1,-3,3)$.

Решение.

Было доказано, что наименьший угол будет между вектором $\bar{x}$ и его ортогональной проекцией на линейную оболочку векторов $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$.

Найдем ортогональную проекцию. Для этого снова запишем вектор $\bar{x}$ в виде

$\bar{x} = c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + \bar{a}_\perp$,

где вектор $\bar{a}_\perp$ ортогонален векторам $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$, то есть $(\bar{a}_\perp, \bar{a}_1) = 0$ и $(\bar{a}_\perp, \bar{a}_2) = 0$.

Умножим скалярно вектор $\bar{x} = c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + \bar{a}_\perp$ на векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$, получим:

$$(\bar{x}, \bar{a}_1) = (c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + \bar{a}_\perp, \bar{a}_1) = (c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2, \bar{a}_1) + (\bar{a}_\perp, \bar{a}_1) =$$
$$= c_1(\bar{a}_1, \bar{a}_1) + c_2(\bar{a}_2, \bar{a}_1),$$

$$(\bar{x}, \bar{a}_2) = (c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + \bar{a}_\perp, \bar{a}_2) = (c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2, \bar{a}_2) + (\bar{a}_\perp, \bar{a}_2) =$$
$$= c_1(\bar{a}_1, \bar{a}_2) + c_2(\bar{a}_2, \bar{a}_2),$$

так как $(\bar{a}_\perp, \bar{a}_1) = 0$ и $(\bar{a}_\perp, \bar{a}_2) = 0$, но $(\bar{a}_1, \bar{a}_2) \neq 0$.

Кроме того,

$(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = 5 - 1 - 3 + 3 = 4$,

$(\bar{a}_1, \bar{a}_1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$,

$(\bar{a}_2, \bar{a}_2) = 25 + 1 + 9 + 9 = 44$,

$(\bar{x}, \bar{a}_1) = 1 - 3 - 1 + 3 = 0$,

$(\bar{x}, \bar{a}_2) = 5 + 3 + 3 + 9 = 20$.

Все вышеизложенное позволяет получить систему относительно c_1 и c_2:

$$\begin{cases} 4c_1 + 4c_2 = 0 \\ 4c_1 + 44c_2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 11c_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \quad 10c_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{2} \\ c_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Поэтому проекция вектора $\bar{x}$ на линейную оболочку векторов $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ будет равна

$$c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 = -\frac{1}{2}(1, -1, 1, 1) + \frac{1}{2}(5, 1, -3, 3) = (2, 1, -2, 1).$$

Итак, ортогональная проекция $\bar{a} = c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 = (2, 1, -2, 1)$.

Найдем угол φ между $\bar{x}$ и $\bar{a}$.

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{x}, \bar{a})}{\|\bar{x}\|\|\bar{a}\|} = \frac{2+3+2+3}{\sqrt{1+9+1+9}\sqrt{4+1+4+1}} = \frac{10}{\sqrt{20}\sqrt{10}} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

4.5.2. Задачи о подпространствах, заданных линейными оболочками векторов

Задача 2.1. Дано векторное пространство, натянутое на векторы $\bar{x}_1 = (2,1,3,1)$, $\bar{x}_2 = (1,2,0,1)$, $\bar{x}_3 = (-1,1,-3,0)$. Найти его базис и размерность.

Решение.

Из векторов $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ составим матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ и приведем ее к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен 2, поэтому и размерность пространства равна 2. В качестве базисных векторов можно взять векторы $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$.

Ответ: размерность пространства равна 2; базис, например, $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$.

Задача 2.2. Дано векторное пространство, натянутое на векторы $\bar{x}_1 = (2,1,3,-1)$, $\bar{x}_2 = (-1,1,-3,1)$, $\bar{x}_3 = (4,5,3,-1)$, $\bar{x}_4 = (1,5,-3,1)$. Найти его базис и размерность.

Решение.

Из векторов $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3, \bar{x}_4$ составим матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ и приведем ее к ступенчатому виду.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & -9 & 9 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен 2, поэтому и размерность пространства равна 2. В качестве базисных векторов можно взять векторы $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$.

Ответ: размерность пространства равна 2; базис, например, $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$.

Задача 2.3. Найти базис и размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на векторы $\bar{x}_1 = (1,2,1,0)$, $\bar{x}_2 = (-1,1,1,1)$ и $\bar{y}_1 = (2,-1,0,1)$, $\bar{y}_2 = (1,-1,3,7)$.

Решение.

Сумма пространств.

Сумму пространств будет образовывать пространство, натянутое на все векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2$.

Из векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2$ составим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

и приведем ее к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен 3, поэтому и размерность суммы пространств равна $r_s = 3$.

В качестве базисных векторов можно взять векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1$.

Пересечение пространств.

Так как размерность суммы пространств равна $r_s = 3$, а размерность общего пространства равна 4, то сразу получаем, что размерность пересечения пространств $r_p = 4 - r_s = 4 - 3 = 1$. Следовательно, базис пересечения будет состоять из одного вектора.

Вектор $\bar{u}$ принадлежит одновременно линейной оболочке векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ и линейной оболочке векторов $\bar{y}_1, \bar{y}_2$, то есть он является линейной комбинацией и векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, и векторов $\bar{y}_1, \bar{y}_2$, то есть

$$\bar{u} = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 = c_3\bar{y}_1 + c_4\bar{y}_2$$

$$\Leftrightarrow c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 - c_3\bar{y}_1 - c_4\bar{y}_2 = 0.$$

Это означает, что относительно коэффициентов c_1, c_2, c_3, c_4 мы получили однородную линейную систему, которую нужно решить.

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - c_3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - c_4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 - 2c_3 - c_4 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \\ c_1 + c_2 \qquad\quad - 3c_4 = 0 \\ \qquad c_2 - c_3 - 7c_4 = 0. \end{cases}$$

Найдем фундаментальную систему решений этой однородной линейной системы. Рассмотрим и приведем к нужному ступенчатому виду матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Возвращаясь к системе, получаем, что так как ранг матрицы равен 3, то размерность пространства решений будет равна 1 (что и ожидалось!).

$$\begin{cases} c_1 = -c_4 \\ c_2 = 4c_4 \\ c_3 = -3c_4. \end{cases}$$

Поэтому в качестве базиса в пространстве решений этой системы можем взять вектор

$(c_1, c_2, c_3, c_4) = (-1,4,-3,1)$.

Получаем, что вектор $\bar{u} = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 = c_3\bar{y}_1 + c_4\bar{y}_2$, принадлежащий пересечению пространств, выражается, например, через $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ следующим образом:

$\bar{u} = -\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2$,

поэтому вектор $-\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2$ можно взять в качестве базиса пересечения пространств.

Ответ: $r_s = 3$, базис: $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1$; $r_p = 1$, базис: $-\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2$.

Задача 2.4. Найти базис и размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на векторы $\bar{x}_1 = (1,2,-1,-2)$, $\bar{x}_2 = (3,1,1,1)$, $\bar{x}_3 = (-1,0,1,-1)$ и $\bar{y}_1 = (2,5,-6,-5)$, $\bar{y}_2 = (-1,2,-7,-3)$.

Решение.

Сумма пространств.

Сумму пространств будет образовывать пространство, натянутое на все векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{y}_1, \bar{y}_2$.

Из векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{y}_1, \bar{y}_2$ составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -6 & -5 \\ -1 & 2 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

и приведем ее к ступенчатому виду.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -6 & -5 \\ -1 & 2 & -7 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & -2 \\ 0 & 0 & 24 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен 3, поэтому и размерность суммы пространств равна $r_s = 3$.

В качестве базисных векторов можно взять векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$.

Мы получили, что сумма подпространств совпадает с первым подпространством, а значит, пересечение подпространств совпадает со вторым подпространством. Нетрудно видеть, что векторы $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ линейно независимы (они не коллинеарны), поэтому размерность пересечения равна $r_p = 2$, и в качестве базиса можно взять векторы $\bar{y}_1, \bar{y}_2$.

Ответ: $r_s = 3$, базис: $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$; $r_p = 2$, базис: $\bar{y}_1, \bar{y}_2$.

Задача 2.5. Найти базис и размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на векторы $\bar{x}_1 = (1,1,0,0)$, $\bar{x}_2 = (1,0,1,1)$ и $\bar{y}_1 = (0,0,1,1)$, $\bar{y}_2 = (0,1,1,0)$.

Решение.

Сумма пространств.

Сумму пространств будет образовывать пространство, натянутое на все векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2$.

Из векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2$ составим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

и приведем ее к ступенчатому виду.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim .$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы A равен 4, поэтому и размерность суммы пространств равна $r_s = 4$.

В качестве базисных векторов можно взять векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2$.

Так как размерность общего пространства равна 4, то $r_p = 4 - r_s = 4 - 4 = 0$.

Ответ: $r_s = 4$, базис: $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2$; $r_p = 0$.