МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ

ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

(для студентов химических специальностей)

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2026

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций.

Предлагаемая Вашему вниманию серия пособий содержит описание курса лекций по линейной алгебре, многие годы читавшегося на химическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова и образцы решения типовых задач.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче ими экзаменов и зачётов.

5. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

5.1. Линейные отображения

5.2. Линейные операторы

5.3. Матричная запись линейных операторов

5.4. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

5.5. Собственные векторы и собственные числа линейного преобразования

5.6. Решение задач

5.1. Линейные отображения

Пусть V и W линейные пространства над $\mathbb{R}$ (вообще говоря, над произвольным полем).

Определение. ***Отображение*** $\mathcal{A}: V \to W$ ***называется линейным***, если для всех $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in V$ выполнено равенство $\mathcal{A}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \mathcal{A}(\bar{x}_1) + \mathcal{A}(\bar{x}_2)$ и для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ и всех $\bar{x} \in V$ имеем $\mathcal{A}(\alpha\bar{x}) = \alpha\mathcal{A}(\bar{x})$.

Отображения $\mathcal{A}: V \to W$ и $\mathcal{B}: V \to W$ ***считаются равными***, если для любого $\bar{x} \in V$ выполнено равенство $\mathcal{A}(\bar{x}) = \mathcal{B}(\bar{x})$.

Операции ***сложения отображения*** и ***умножения отображения*** на число задаются равенствами

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\bar{x}) = \mathcal{A}(\bar{x}) + \mathcal{B}(\bar{x}) \tag{5.1}$$

$$(\mathcal{A}\alpha)(\bar{x}) = \alpha\mathcal{A}(\bar{x}),\ \alpha \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$

и равенства имеют место для любого $\bar{x} \in V$.

Нулевое отображение $\mathcal{O}$ определим равенством $\mathcal{O}(\bar{x}) = \bar{0}$ для любого $\bar{x} \in V$.

Противоположное к $\mathcal{A}$ по сложению ***отображение*** $(-\mathcal{A})$ определим верным для любого вектора $\bar{x} \in V$ равенством $(-\mathcal{A})(\bar{x}) = -\mathcal{A}(\bar{x})$.

Определение. Образом $Im\ \mathcal{A}$ линейного отображения называется множество всех $\bar{y} \in W$ таких, что существует $\bar{x} \in V$ с условием $\mathcal{A}(\bar{x}) = \bar{y}$.

Можно доказать следующую теорему.

Теорема 5.1. Множество линейных отображений $\mathcal{A}: V \to W$ образует векторное пространство.

►Сумма линейных отображений $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ и отображение $\alpha\mathcal{A}$ являются линейными отображениями. Например,

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \mathcal{A}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) + \mathcal{B}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) =$$
$$= \mathcal{A}(\bar{x}_1) + \mathcal{A}(\bar{x}_2) + \mathcal{B}(\bar{x}_1) + \mathcal{B}(\bar{x}_2) = \mathcal{A}(\bar{x}_1) + \mathcal{B}(\bar{x}_1) + \mathcal{A}(\bar{x}_2) + \mathcal{B}(\bar{x}_2) =$$
$$= (\mathcal{A} + \mathcal{B})(\bar{x}_1) + (\mathcal{A} + \mathcal{B})(\bar{x}_2).$$

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\alpha\bar{x}) = \mathcal{A}(\alpha\bar{x}) + \mathcal{B}(\alpha\bar{x}) = \alpha\mathcal{A}(\bar{x}) + \alpha\mathcal{B}(\bar{x}) = \alpha(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\bar{x}).$$

Проверка линейности отображения $\alpha\mathcal{A}$ вполне аналогична.

Это линейное пространство обозначается $L(V, W)$ ◄

Определение. ***Ядром*** $Ker\mathcal{A}$ ***линейного отображения*** называется множество векторов $\bar{x} \in V$ таких, что $\mathcal{A}(\bar{x}) = \bar{0} \in W$.

Теорема 5.2. Образ линейного отображения $\mathcal{A}: V \to W$ есть подпространство W, ядро этого отображения является подпространством V.

►Пусть $\bar{y}_1 \in Im\mathcal{A}$, $\bar{y}_2 \in Im\mathcal{A}$.

Это означает, что $\bar{y}_1 = \mathcal{A}(\bar{x}_1)$, $\bar{y}_2 = \mathcal{A}(\bar{x}_2)$.

Значит, $\bar{y}_1 + \bar{y}_2 = \mathcal{A}(\bar{x}_1) + \mathcal{A}(\bar{x}_2) = \mathcal{A}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \in Im\mathcal{A}$.

Аналогично, если $\bar{y} \in Im\mathcal{A}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$\alpha\bar{y} = \alpha\mathcal{A}(\bar{x}) = \mathcal{A}(\alpha\bar{x}) \in Im\mathcal{A}$.

Аналогично, если $\mathcal{A}(\bar{x}_1) = \bar{0} \in W$, $\mathcal{A}(\bar{x}_2) = \bar{0} \in W$, то есть если

$\bar{x}_1 \in Ker\mathcal{A}$, $\bar{x}_2 \in Ker\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \mathcal{A}(\bar{x}_1) + \mathcal{A}(\bar{x}_2) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \in W$,

то есть $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in Ker\mathcal{A}$.

Если $\bar{x} \in Ker\mathcal{A}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\mathcal{A}(\alpha\bar{x}) = \alpha\mathcal{A}(\bar{x}) = \alpha \cdot \bar{0} = \bar{0} \in W$,

то есть $\alpha\bar{x} \in Ker\mathcal{A}$.◄

Определение. Размерность $Im\mathcal{A}$ называется ***рангом отображения*** $\mathcal{A}$, размерность $Ker\mathcal{A}$ называется ***дефектом*** отображения $\mathcal{A}$.

5.2. Линейные операторы

Определение. В случае $V = W$, то есть в случае отображения $\mathcal{A}: V \to V$ будем называть $\mathcal{A}$ ***линейным оператором*** в пространстве V или ***линейным преобразованием*** V.

Соответствующее векторное пространство линейных преобразований обозначается $L(V, V)$.

Определение. ***Единичный*** **(**или ***тождественный*****)** ***оператор*** $\mathcal{E}$ определен равенством.

$\mathcal{E}\bar{x} = \bar{x}$

для любого $\bar{x} \in V$.

Определение. ***Произведение операторов*** $\mathcal{A}: V \to V$, $\mathcal{B}: V \to V$ определяется верным для любого $\bar{x} \in V$ равенством

$$(\mathcal{AB})(\bar{x}) = \mathcal{A}\big(\mathcal{B}(\bar{x})\big). \tag{5.3}$$

Теорема 5.3. Произведение $\mathcal{AB}$ линейных операторов – линейный оператор.

Справедливы равенства:

$$\lambda(\mathcal{AB}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B}$$

$$\begin{gathered}(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{AC} + \mathcal{BC} \\ \mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{AB} + \mathcal{AC}\end{gathered} \tag{5.4}$$

$$(\mathcal{AB})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{BC})$$

►Докажем линейность оператора $\mathcal{AB}$, использовав (5.3), (5.1) и (5.2):

$$\mathcal{AB}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \mathcal{A}\big(\mathcal{B}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\big) = \mathcal{A}\big(\mathcal{B}(\bar{x}_1) + \mathcal{B}(\bar{x}_2)\big) = \mathcal{AB}(\bar{x}_1) + \mathcal{AB}(\bar{x}_2)$$
$$\mathcal{AB}(\alpha\bar{x}) = \mathcal{A}\big(\mathcal{B}(\alpha\bar{x})\big) = \mathcal{A}\big(\alpha\mathcal{B}(\bar{x})\big) = \alpha\mathcal{A}\big(\mathcal{B}(\bar{x})\big) = \alpha\mathcal{AB}(\bar{x}).$$

Свойства (5.4) проверяются вполне аналогично. ◄

5.3. Матричная запись линейных операторов

Фиксируем в V базис $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ и пусть для $\bar{x} \in V$

$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + \cdots + x_n\bar{e}_n$.

Тогда ввиду (5.1) и (5.2)

$$\mathcal{A}(\bar{x}) = \mathcal{A}(x_1\bar{e}_1 + \cdots + x_n\bar{e}_n) = \mathcal{A}(x_1\bar{e}_1) + \cdots + \mathcal{A}(x_n\bar{e}_n) = \\ = x_1\mathcal{A}(\bar{e}_1) + \cdots + x_n\mathcal{A}(\bar{e}_n) \quad (5.5)$$

Разложим векторы $\mathcal{A}(\bar{e}_1), \dots, \mathcal{A}(\bar{e}_n)$ по базису $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$.

$$\mathcal{A}(\bar{e}_k) = a_{1k}\bar{e}_1 + \cdots + a_{nk}\bar{e}_n, \;\; k = 1, \dots, n \quad (5.6)$$

и подставим равенства (5.6) в (5.5):

$$\mathcal{A}(\bar{x}) = x_1\mathcal{A}(a_{11}\bar{e}_1 + \cdots + a_{n1}\bar{e}_n) + \cdots + x_n\mathcal{A}(a_{1n}\bar{e}_1 + \cdots + a_{nn}\bar{e}_n) = \\ = (a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n)\bar{e}_1 + \cdots + (a_{n1}x_1 + \cdots a_{nn}x_n)\bar{e}_n. \quad (5.7)$$

Если обозначить $\bar{y} = \mathcal{A}(\bar{x})$ и считать, что $\bar{y}$ имеет координаты $y_1, \dots, y_n$, то равенство (5.7) можно переписать в матричном виде

$$\bar{y} = A\bar{x}, \quad (5.8)$$

где $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. (5.9)

Определение. Матрица A, определенная в равенствах (5.6) и (5.9), называется ***матрицей линейного оператора*** $\mathcal{A}$ ***в базисе*** $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$. В ее столбце с номером k стоят координаты вектора $\mathcal{A}(\bar{e}_k)$ в базисе $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$.

Итак, мы выяснили, что каждому линейному оператору $\mathcal{A}$ при фиксированном базисе $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ пространства V соответствует матрица A этого оператора.

Осталось выяснить два вопроса. Первый состоит в том, каждой ли матрице A соответствует линейный оператор $\mathcal{A}$? Второй – является ли соответствие операторов и матриц в заданном базисе взаимно-однозначным? Положительный ответ на оба вопроса дает следующая теорема.

Теорема 5.4. Пусть в линейном пространстве V задан базис $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ и пусть A – квадратная $n \times n$ матрица. Существует, притом единственный, линейный оператор $\mathcal{A}$, матрицей которого в данном базисе является A.

►Докажем сначала существование линейного оператора $\mathcal{A}$ с заданной матрицей A, в базисе $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$. Для этого определим образы базисных векторов $\bar{e}_k, k = 1, \dots, n$ равенством (5.6). Для любого $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ определим оператор $\mathcal{A}(\bar{x})$ равенством (5.5).

Поскольку разложение $\bar{x}$ по базису единственное, это определение корректное. Докажем линейность построенного отображения, использовав (5.5).

Для любых $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in V$

$\bar{x}_1 = x_1^1\bar{e}_1 + \cdots + x_n^1\bar{e}_n, \quad \bar{x}_2 = x_1^2\bar{e}_1 + \cdots + x_n^2\bar{e}_n$

$$\mathcal{A}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = (x_1^1 + x_1^2)\mathcal{A}(\bar{e}_1) + \cdots + (x_n^1 + x_n^2)\mathcal{A}(\bar{e}_n) =$$
$$= x_1^1\mathcal{A}(\bar{e}_1) + \cdots + x_n^1\mathcal{A}(\bar{e}_n) + x_1^2\mathcal{A}(\bar{e}_1) + \cdots + x_n^2\mathcal{A}(\bar{e}_n) = \mathcal{A}(\bar{x}_1) + \mathcal{A}(\bar{x}_2).$$

Для любого $\bar{x} \in V$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ согласно (5.5):

$$\mathcal{A}(\alpha\bar{x}) = \mathcal{A}(\alpha x_1\bar{e}_1 + \cdots + \alpha x_n\bar{e}_n) = \alpha x_1\mathcal{A}(\bar{e}_1) + \cdots + \alpha x_n\mathcal{A}(\bar{e}_n) = \alpha\mathcal{A}(\bar{x}).$$

Итак, любой матрице A соответствует линейный оператор $\mathcal{A}$. Однозначность этого соответствия вытекает из того, что разложения векторов $\mathcal{A}(\bar{e}_k)$ по базису $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ определены однозначно. ◄

Следствие. Из доказательства теоремы 5.4 и равенств (5.1) – (5.3) вытекает, что если в фиксированном базисе $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ заданы матрицами A и B, то операторам $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\alpha\mathcal{A}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\mathcal{AB}$ соответствуют матрицы $A + B$, αA и AB.

Укажем на связь введенных в этой главе понятий с системами линейных уравнений.

Теорема 5.5. Пусть в пространстве V зафиксирован базис $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ и рассматривается линейный оператор $\mathcal{A}$, матрица которого в заданном базисе равна A. Тогда образ $Im\mathcal{A}$ представляет собой множество векторов $\bar{b} \in V$, для которых имеет решение система уравнений

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

и ранг оператора $\mathcal{A}$ равен рангу матрицы A, а ядро $Ker\mathcal{A}$ представляет собой множество решений системы

$$A\bar{x} = \bar{0}$$

и размерность ядра $\mathcal{A}$ равна $n - \operatorname{rang} A$.

►Согласно (5.8) координаты вектора $\bar{b}$, который является образом некоторого $\bar{x} \in V$ при отображении $\mathcal{A}$ вычисляется по формуле

$A\bar{x} = \bar{b}$,

принадлежность $\bar{x}$ ядру $Ker\mathcal{A}$ определяется из условия $A\bar{x} = \bar{0}$.

Образ $Im\mathcal{A}$ состоит из векторов (5.5), представляющих собой всевозможные линейные комбинации векторов $\mathcal{A}(\bar{e}_i)$, $i = 1, \dots, n$, то есть линейную оболочку $\mathcal{A}(\bar{e}_1), \dots, \mathcal{A}(\bar{e}_n)$.

Размерность этой линейной оболочки равна рангу матрицы, составленной из координат векторов $\mathcal{A}(\bar{e}_1), \dots, \mathcal{A}(\bar{e}_n)$ согласно теореме 3.4, то есть рангу A.

Размерность ядра $Ker\mathcal{A}$, то есть $\dim Ker\mathcal{A}$ равна размерности пространства решений системы

$A\bar{x} = \bar{0}$,

которая равна $n - \operatorname{rang} A$ по теореме 3.2. ◄

Напомним: предположим, что мы решаем систему линейных уравнений:

$A\bar{x} = \bar{b}$

и произведем в ней замену переменных по формуле $\bar{x} = C\bar{x}'$. Какой вид будет иметь матрица системы в переменных $x_1', \dots, x_n'$?

Ответ прост: в равенство $A\bar{x} = \bar{b}$ подставляем $\bar{x} = C\bar{x}'$. Получим $A(C\bar{x}') = \bar{b}$. Используя ассоциативность умножения матриц, окончательно находим $(AC)\bar{x}' = \bar{b}$, то есть матрица рассматриваемой системы уравнений при замене переменных по формуле $\bar{x} = C\bar{x}'$ примет вид AC.

При этом $\bar{x}' = (AC)^{-1}\bar{b} = C^{-1}A^{-1}\bar{b}$.

5.4. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Пусть V – линейное пространство, $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ – базис V, $\bar{e}_1', \dots, \bar{e}_n'$ – другой базис V, C – матрица (3.17) перехода от базиса $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ к базису $\bar{e}_1', \dots, \bar{e}_n'$.

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор, A – его матрица в базисе $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$, A' – его матрица в базисе $\bar{e}_1', \dots, \bar{e}_n'$.

Теорема 5.6.

$$A' = C^{-1}AC\,. \tag{5.10}$$

►Пусть $\bar{x} \in V$ и пусть $\mathcal{A}(\bar{x}) = \bar{y}, \bar{y} \in V$. Рассматривая разложения векторов по базисам $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$, $\bar{e}_1', \dots, \bar{e}_n'$, получаем

$$\bar{y} = A\bar{x}, \qquad \bar{y}' = A'\bar{x}'. \tag{5.11}$$

Согласно (3.39) получаем

$$C\bar{x}' = \bar{x}, \tag{5.12}$$

$$C\bar{y}' = \bar{y}\,. \tag{5.13}$$

Так как матрица C, очевидно, имеет обратную матрицу C^{-1}, так как является матрицей перехода от базиса $\bar{e}_1{}', \dots, \bar{e}_n{}'$ к базису $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$, из (5.13) находим $\bar{x}' = C^{-1}\bar{x}$ и, используя (5.11), (5.12), (5.13) получаем

$$\bar{y} = C\bar{y}' = CA'\bar{x}' = CA'C^{-1}\bar{x} = A\bar{x}.$$

Из последнего равенства, ввиду единственности матрицы линейного оператора, получаем

$CA'C^{-1} = A.$

Или, умножая обе части этого равенства слева на C^{-1} и справа на C:

$A' = C^{-1}AC.$◄

Следствие. Определитель матрицы A оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ равен определителю матрицы A' оператора $\mathcal{A}$ в любом другом базисе $\bar{e}_1{}', \dots, \bar{e}_n{}'$.

►Из равенства $A' = C^{-1}AC$ и свойств определителя:

$|AB| = |A||B|, \quad |C^{-1}| = \frac{1}{|C|}$

следует, что

$|A'| = |C^{-1}AC| = |C^{-1}||A||C| = \frac{1}{|C|}|A||C| = |A|.$◄

Определение. Матрицы A и B называются ***подобными***, если существует невырожденная (то есть имеющая обратную) матрица C такая, что $A = C^{-1}BC.$

Теорема 5.6. означает, что матрицы линейного оператора в разных базисах подобны.

5.5. Собственные векторы и собственные числа линейного преобразования

Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ – оператор из $L(V, V)$.

Определение. Отличный от $\bar{0}$ вектор $\bar{x}$ называется ***собственным вектором линейного оператора*** $\mathcal{A}$, если существует такое число $\lambda \in \mathbb{R}$, что

$$\mathcal{A}(\bar{x}) = \lambda\bar{x}. \qquad (5.14)$$

Это число λ называется ***собственным значением*** (или ***собственным числом***) ***оператора*** $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Пусть задан некоторый базис $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$, в котором преобразование $\mathcal{A}$ имеет матрицу A. Тогда (5.14) принимает вид:

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}$$

или $A\bar{x} = \lambda E\bar{x}$,

где E – единичная матрица,

или $(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}$. (5.15)

Получена система линейных уравнений с матрицей $A - \lambda E$. По условию, система (5.15) имеет ненулевое решение $\bar{x}$. Это означает, что:

$|A - \lambda E| = 0$

или

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.16)$$

Определение. ***Уравнение*** (5.16) называется ***характеристическим***. Любое собственное значение оператора $\mathcal{A}$ должно ему удовлетворять.

Теорема 5.7. Собственному вектору $\bar{x}$ соответствует единственное значение λ. Собственному значению λ соответствует множество собственных векторов и эти векторы определяют подпространство пространства V.

►Рассмотрим некоторый базис $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ и пусть у вектора $\bar{x}$ есть собственное значение λ_1 и λ_2. Тогда $A\bar{x} = \lambda_1\bar{x}$, $A\bar{x} = \lambda_2\bar{x}$, откуда

$\bar{0} = (\lambda_1 - \lambda_2)\bar{x}$.

Так как по условию, $\bar{x} \neq 0$, то $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Пусть $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ – собственные векторы, соответствующие собственному значению λ. Тогда $\mathcal{A}(\bar{x}_1) = \lambda\,\bar{x}_1$, $\mathcal{A}(\bar{x}_2) = \lambda\,\bar{x}_2$.

И тогда $\mathcal{A}(\bar{x}_1+\bar{x}_2) = \mathcal{A}(\bar{x}_1) + \mathcal{A}(\bar{x}_2) = \lambda\bar{x}_1 + \lambda\bar{x}_2 = \lambda(\bar{x}_1+\bar{x}_2)$, то есть вместе с $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ вектор $(\bar{x}_1+\bar{x}_2)$ – собственный вектор $\mathcal{A}$ с собственным значением λ.

Кроме того, для любого $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$

$\mathcal{A}(\alpha\bar{x}) = \alpha\mathcal{A}\bar{a} = \alpha\lambda\bar{x} = \lambda(\alpha\bar{x})$, то есть вместе с вектором $\bar{x}$ вектор $\alpha\bar{x}$ является собственным вектором с собственным значением λ. ◄

Рассмотрим пример нахождения собственных чисел и соответствующих им собственных векторов.

Пример. Пусть оператор $\mathcal{A}$ имеет в некотором базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (5.16) принимает вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad (1-\lambda)(3-\lambda) = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$ – собственные числа данного оператора.

Для нахождения собственных векторов, отвечающих этим значениям, рассмотрим соответствующую систему (5.15) при $\lambda_1 = 1$.

$$\begin{cases} (1-\lambda_1)x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \\ x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0, \end{cases}$$

отсюда $x_1 + 2x_2 = 0$, и любой собственный вектор с этим значением $\lambda_1 = 1$ имеет вид:

$$\bar{x} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Для $\lambda_2 = 3$ получим

$$\begin{cases} -2x_1 + 0 \cdot x_1 = 0 \\ x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

Откуда $x_1 = 0,\ x_2 -$ любое число и любой собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 3$, имеет вид:

$$\bar{x} = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Не всякий линейный оператор имеет собственные векторы и собственные значения. Рассмотрим, например, в $\mathbb{R}^2$ оператор $\mathcal{A}$, представляющий собой поворот относительно начала координат на угол $\varphi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Из геометрических соображений сразу ясно, что при повороте ни один ненулевой вектор $\bar{x}$ не перейдет в пропорциональной вектор $\lambda\bar{x}$, так как образ $\mathcal{A}(\bar{x})$ вектора представляет собой исходный вектор, повернутый на угол φ, $\varphi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Докажем отсутствие собственных векторов формальными рассуждениями. При повороте на угол φ базис $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ переходит в базис:

$\bar{e}_1' = \cos\varphi \cdot \bar{e}_1 + \sin\varphi \cdot \bar{e}_2$

$\bar{e}_2' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cdot \bar{e}_1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cdot \bar{e}_2 = -\sin\varphi \cdot \bar{e}_1 + \cos\varphi \cdot \bar{e}_2.$

В этом базисе матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

При этом $|A| = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ и обратная матрица равна

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

У характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

равносильного уравнению $(\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi = 0$, очевидно, нет действительных корней при $\varphi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Вернемся к рассмотрению уравнения (5.16).

Может возникнуть вопрос, не зависят ли его корни от того, в каком базисе проводится рассмотрение?

Теорема 5.8. Характеристические уравнения (5.16), найденные в любых базисах, совпадают.

►Пусть в базисе $\bar{e}_1', \dots, \bar{e}_n'$ оператор $\mathcal{A}$ задается матрицей A'. Тогда характеристическое уравнение (5.16) в этом базисе запишется в виде:

$$|A' - \lambda E| = 0. \qquad (5.18)$$

Рассмотрим задачу в базисе $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ и воспользуемся теоремой 5.6, согласно которой

$$A' = C^{-1}AC.$$

Уравнение (5.18) принимает вид

$$|C^{-1}AC - \lambda E| = 0. \qquad (5.19)$$

Так как $C^{-1}EC = EC^{-1}C = E \cdot E = E$ уравнение (5.19) перепишем в виде

$|C^{-1}AC - \lambda C^{-1}EC| = 0,$

$|C^{-1}||A - \lambda E||C| = 0,$

$|A - \lambda E| = 0.$

Мы видим, что характеристическое уравнение (5.18) для оператора $\mathcal{A}$ в новом базисе $\bar{e}_1{}', \dots, \bar{e}_n{}'$ совпадает с уравнением (5.15) в базисе $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$. ◄

Теорема 5.9. Собственные векторы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$, отвечающие попарно различным собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, линейно независимы.

►Для доказательства воспользуемся методом математической индукции.

При $m = 1$ вектор $\bar{x}_1$ по определению отличен от $\bar{0}$.

Пусть векторы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1}$, соответствующие попарно различным $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$, линейно независимы, но пусть

$$c_1\bar{x}_1 + \dots + c_m\bar{x}_m = \bar{0}. \qquad (5.20)$$

Применим к обеим частям равенства (5.20) оператор $\mathcal{A}$ и получим:

$$\bar{0} = \mathcal{A}(\bar{0}) = \mathcal{A}(c_1\bar{x}_1 + \dots + c_m\bar{x}_m) = \mathcal{A}(c_1\bar{x}_1) + \dots + \mathcal{A}(c_m\bar{x}_m) =$$
$$= c_1\mathcal{A}(\bar{x}_1) + \dots + c_m\mathcal{A}(\bar{x}_m) = c_1\lambda_1\bar{x}_1 + \dots + c_m\lambda_m\bar{x}_m = \bar{0}. \qquad (5.21)$$

Умножим обе части (5.20) на число λ_m и вычтем полученное равенство из равенства (5.21), получим

$c_1(\lambda_m - \lambda_1)\bar{x}_1 + \dots + c_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\bar{x}_{m-1} = \bar{0}.$

Из этого равенства, ввиду линейной независимости $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1}$, получаем

$$c_1(\lambda_m - \lambda_1) = 0, \dots, c_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0$$

и, так как $\lambda_m - \lambda_1 \neq 0$,..., $\lambda_m - \lambda_{m-1} \neq 0$,

$c_1 = \dots = c_{m-1} = 0.$

Тогда равенство (5.20) принимает вид $c_m\bar{x}_m = \bar{0}$.

И ввиду того, что $\bar{x}_m \neq \bar{0}$ по определению собственного вектора, получаем, что $c_m = 0$. Это означает, что векторы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$ линейно независимы. ◄

Теорема 5.10. Если оператор $\mathcal{A} \in L(V, V)$, $\dim V = n$ имеет n различных собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то в базисе из соответствующих им собственных векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ его матрица имеет следующий вид:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_\mathrm{n} \end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

►По предыдущей теореме собственные векторы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ линейно независимы и, следовательно, образуют базис пространства V.

Так как $\mathcal{A}(\bar{x}_k) = \lambda_k \bar{x}_k$, $k = 1, \dots, n$, то (5.22) выполняется по определению (5.9) матрицы A.◄

Определение. Базис пространства, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ (если он существует), называется ***собственным базисом оператора $\mathcal{A}$.***

Примечание 1. То, что в собственном базисе матрица A оператора $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид (5.22), значительно упрощает вычисление степеней матрицы A: для любого $l \in \mathbb{N}$:

$$A^l = \begin{pmatrix} \lambda_1^l & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^l \end{pmatrix}.$$

5.6. Решение задач

Задача 1.1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

Найдем характеристический многочлен матрицы A.

$$\det(A - \lambda E) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Найдем корни характеристического многочлена.

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Найдем собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям.

$\lambda_1 = 1$.

Обозначим собственный вектор $\bar{y}_1 = (x_1, x_2)$.

$A\bar{y}_1 = \lambda_1\bar{y}_1 \Leftrightarrow (A - \lambda_1 E)\bar{y}_1 = \bar{0}$.

Получаем однородную систему

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix}\bar{y}_1 = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -x_1.$$

Следовательно, любой вектор вида $\bar{y}_1 = c_1(1,-1)$, $c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ является собственным вектором, отвечающим собственному значению $\lambda_1 = 1$.

$\lambda_2 = 3$.

Обозначим собственный вектор $\bar{y}_2 = (x_1, x_2)$.

$A\bar{y}_2 = \lambda_2\bar{y}_2 \Leftrightarrow (A - \lambda_2 E)\bar{y}_2 = \bar{0}$.

Получаем однородную систему

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_2 \end{pmatrix}\bar{y}_2 = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_1.$$

Следовательно, любой вектор вида $\bar{y}_2 = c_2(1,1)$, $c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ является собственным вектором, отвечающим собственному значению $\lambda_2 = 3$.

Отметим, что мы рассматривали векторы в пространстве $\mathbb{R}^2$. Векторы $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ линейно независимы. Следовательно, любая пара векторов $\bar{y}_1 = c_1(1,-1)$ и $\bar{y}_2 = c_2(1,1)$ при любых значениях $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, образует базис в $\mathbb{R}^2$.

Ответ: $\lambda_1 = 1$, $\bar{y}_1 = c_1(1,-1)$, $c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$\lambda_2 = 3$, $\bar{y}_2 = c_2(1,1)$, $c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Задача 1.2. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

Найдем характеристический многочлен матрицы A.

$$\det(A - \lambda E) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 20 =$$
$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 - 20 = \lambda^2 - 5\lambda - 14.$$

Найдем корни характеристического многочлена.

$\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = -2.$

Найдем собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям.

$\lambda_1 = 7.$

Обозначим собственный вектор $\bar{y}_1 = (x_1, x_2).$

$A\bar{y}_1 = \lambda_1 \bar{y}_1 \Leftrightarrow (A - \lambda_1 E)\bar{y}_1 = \bar{0}.$

Получаем однородную систему

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_1 & 4 \\ 5 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix} \bar{y}_1 = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-7 & 4 \\ 5 & 2-7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_1.$$

Следовательно, любой вектор вида $\bar{y}_1 = c_1(1,1),\ c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ является собственным вектором, отвечающим собственному значению $\lambda_1 = 7$.

$\lambda_2 = -2.$

Обозначим собственный вектор $\bar{y}_2 = (x_1, x_2).$

$A\bar{y}_2 = \lambda_2 \bar{y}_2 \Leftrightarrow (A - \lambda_2 E)\bar{y}_2 = \bar{0}.$

Получаем однородную систему

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_2 & 4 \\ 5 & 2-\lambda_2 \end{pmatrix} \bar{y}_2 = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3+2 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 5x_1 + 4x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -\tfrac{5}{4}x_1.$$

Следовательно, любой вектор вида $\bar{y}_2 = c_2(4,-5),\ c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ является собственным вектором, отвечающим собственному значению $\lambda_2 = -2$.

Вновь отметим, что мы рассматривали векторы в пространстве $\mathbb{R}^2$. Векторы $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ линейно независимы. Следовательно, например, векторы $(1,1)$ и $(4,-5)$ образуют базис в $\mathbb{R}^2$ (но и любая пара векторов $\bar{y}_1 = c_1(1,1)$ и $\bar{y}_2 = c_2(4,-5)$ при любых значениях $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, образует базис в $\mathbb{R}^2$).

Ответ: $\lambda_1 = 7,\ \bar{y}_1 = c_1(1,1),\ c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$

$\lambda_2 = -2,\ \bar{y}_2 = c_2(4,-5),\ c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

В следующих задачах мы будем сразу переходить к преобразованию матрицы однородной системы и поиску ее фундаментальной системы решений.

Задача 1.3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{pmatrix}$.

Решение.

Найдем характеристический многочлен матрицы A.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&1&0\\-4&-1-\lambda&0\\4&-8&-2-\lambda\end{vmatrix}=$$
$$=(3-\lambda)(-1-\lambda)(-2-\lambda)+0+0-0-0+4(-2-\lambda)=$$
$$=(-2-\lambda)\big((3-\lambda)(-1-\lambda)+4\big)=(-2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3+4)=$$
$$=(-2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1)=(-2-\lambda)(\lambda-1)^2.$$

Найдем корни характеристического многочлена.

$(-2-\lambda)(\lambda-1)^2=0 \Leftrightarrow \lambda_1=-2,\ \ \lambda_2=\lambda_3=1.$

Найдем собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям.

$\lambda_1=-2.$

Обозначим собственный вектор $\bar{y}_1=(x_1,x_2,x_3)$.

$A\bar{y}_1=\lambda_1\bar{y}_1 \Leftrightarrow (A-\lambda_1E)\bar{y}_1=\bar{0}.$

Получаем однородную систему

$$\begin{pmatrix}3-\lambda_1&1&0\\-4&-1-\lambda_1&0\\4&-8&-2-\lambda_1\end{pmatrix}\bar{y}_1=\bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3+2&1&0\\-4&-1+2&0\\4&-8&-2+2\end{pmatrix}\bar{y}_1=\bar{0}.$$

Приведем матрицу системы к нужному нам ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix}5&1&0\\-4&1&0\\4&-8&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}5&1&0\\0&9&0\\0&44&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}5&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\\underbrace{0\ \ 1}_{\text{зависимые}}&&\underbrace{0}_{\text{независимые}}\end{pmatrix}.$$

Вернемся к системе

$$\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Следовательно, любой вектор вида $\bar{y}_1=c_1(0,0,1)$, $c_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ является собственным вектором, отвечающим собственному значению $\lambda_1=-2$.

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ – два одинаковых собственных значения (говорят еще, что это собственное значение кратности два).

Обозначим собственный вектор $\bar{y}_2 = (x_1, x_2, x_3)$.

$A\bar{y}_2 = \lambda_2 \bar{y}_2 \Leftrightarrow (A - \lambda_2 E)\bar{y}_2 = \bar{0}$.

Получаем однородную систему

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_2 & 1 & 0 \\ -4 & -1-\lambda_2 & 0 \\ 4 & -8 & -2-\lambda_2 \end{pmatrix} \bar{y}_2 = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-1 & 1 & 0 \\ -4 & -1-1 & 0 \\ 4 & -8 & -2-1 \end{pmatrix} \bar{y}_2 = \bar{0}.$$

Приведем матрицу системы к нужному нам ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

В этом случае x_2 – независимая переменная, а x_1 и x_3 – зависимые переменные, то есть в системе будем иметь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 10x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2 \\ x_3 = -\frac{10}{3}x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Следовательно, любой вектор вида $\bar{y}_2 = c_2(3, -6{,}20)$, $c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ является собственным вектором, отвечающим собственным значениям $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Заметим, что в этой задаче три собственных значения, но только два собственных вектора.

Ответ: $\lambda_1 = -2$, $\bar{y}_1 = c_1(0{,}0{,}1)$, $c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\bar{y}_2 = c_2(3, -6{,}20)$, $c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Задача 1.4. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Найдем характеристический многочлен матрицы A.

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) - (1-\lambda) = (\lambda^2-1)(1-\lambda)$$

Найдем корни характеристического многочлена.

$(\lambda^2-1)(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \ \ \lambda_3 = -1.$

Найдем собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям.

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.$

Обозначим собственный вектор $\bar{y}_1 = (x_1, x_2, x_3)$.

$A\bar{y}_1 = \lambda_1 \bar{y}_1 \Leftrightarrow (A - \lambda_1 E)\bar{y}_1 = \bar{0}.$

Получаем однородную систему

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \bar{y}_1 = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{y}_1 = \bar{0}.$$

Приведем матрицу системы к нужному нам ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim (1 \quad 0 \quad -1).$$

Вернемся к системе

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Найдем фундаментальную систему решений

x_1	x_2	x_3
0	1	0
1	0	1

Получаем два фундаментальных решения этой системы: $\bar{y}_1 = (0,1,0)$ и $\bar{y}_2 = (1,0,1)$. Следовательно, любой вектор вида $\bar{y} = c_1(0,1,0) + c_2(1,0,1)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ является собственным вектором, отвечающим собственному значению $\lambda_1 = 1$. Это означает, что существует собственное подпространство размерности 2, отвечающее собственным значениям

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. В качестве базиса этого подпространства можно взять векторы $\bar{y}_1 = (0,1,0)$ и $\bar{y}_2 = (1,0,1)$ или два любых других ненулевых линейно независимых вектора из собственного подпространства.

$\lambda_3 = -1$.

Обозначим собственный вектор $\bar{y}_3 = (x_1, x_2, x_3)$.

$A\bar{y}_3 = \lambda_3\bar{y}_3 \Leftrightarrow (A - \lambda_3 E)\bar{y}_3 = \bar{0}$.

Получаем однородную систему

$$\begin{pmatrix} -\lambda_3 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda_3 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix}\bar{y}_2 = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\bar{y}_3 = \bar{0}.$$

Приведем матрицу системы к нужному нам ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае x_3 – независимая переменная, а x_1 и x_2 – зависимые переменные, то есть в системе будем иметь

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Следовательно, любой вектор вида $\bar{y}_3 = c_3(1,0,-1)$, $c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ является собственным вектором, отвечающим собственному значению $\lambda_3 = -1$.

Отметим, что мы рассматривали векторы в пространстве $\mathbb{R}^3$. Векторы $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2, \bar{y}_3$ линейно независимы. Следовательно, например, эти векторы образуют базис в $\mathbb{R}^3$.

Ответ: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\bar{y} = c_1(0,1,0) + c_2(1,0,1)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$;

$\lambda_3 = -1$, $\bar{y}_3 = c_3(1,0,-1)$, $c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Задача 1.5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Найдем характеристический многочлен матрицы A.

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (2-\lambda)(-3-\lambda)(-2-\lambda)+3+0+2(-3-\lambda)-0+5(-2-\lambda) =$$
$$= (4-\lambda^2)(3+\lambda)+3-6-2\lambda-10-5\lambda =$$
$$= -\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1 = -(\lambda+1)^3.$$

Найдем корни характеристического многочлена.

$-(\lambda+1)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$

Получили собственное значение кратности 3 (или 3 одинаковых собственных значения).

Найдем собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$

Обозначим собственный вектор $\bar{y}_1 = (x_1, x_2, x_3)$.

$A\bar{y}_1 = \lambda_1\bar{y}_1 \Leftrightarrow (A-\lambda_1 E)\bar{y}_1 = \bar{0}.$

Получаем однородную систему

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda_1 & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda_1 \end{pmatrix}\bar{y}_1 = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\bar{y}_1 = \bar{0}.$$

Приведем матрицу системы к нужному нам ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \quad 0 & 1 \\ \underbrace{0 \quad 1}_{\text{зависимые}} & \underbrace{1}_{\text{независимая}} \end{pmatrix}.$$

Вернемся к системе

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Следовательно, любой вектор вида $\bar{y}_1 = c_1(1,1,-1)$, $c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ является собственным вектором, отвечающим собственным значениям $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. То есть собственное значение имеет кратность 3, но ему отвечает собственное подпространство размерности 1.

Ответ: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1, \bar{y}_1 = c_1(1,1,-1),\ c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Задача 1.6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Найдем характеристический многочлен матрицы A.

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\big((1-\lambda)^3 - 1 - 1 - (1-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda)\big) -$$
$$-\big((1-\lambda)^2 + 1 + 1 + (1-\lambda) - 1 + (1-\lambda)\big) +$$
$$+(-(1-\lambda) - (1-\lambda) + 1 - 1 - 1 - (1-\lambda)^2) -$$
$$-\big(1 + (1-\lambda)^2 + 1 - 1 + (1-\lambda) + (1-\lambda)\big) =$$
$$= (1-\lambda)((1-\lambda)^3 - 3(1-\lambda) - 2) - ((1-\lambda)^2 + 2(1-\lambda) + 1) +$$
$$+(-(1-\lambda)^2 - 2(1-\lambda) - 1) - ((1-\lambda)^2 + 2(1-\lambda) + 1) =$$
$$= (1-\lambda)((1-\lambda)^3 - 3(1-\lambda) - 2) - 3((1-\lambda)^2 + 2(1-\lambda) + 1) =$$
$$= (1-\lambda)(1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 3 + 3\lambda - 2) - 3(\lambda^2 - 4\lambda + 4) =$$
$$= (\lambda-1)(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4) - 3(\lambda-2)^2 =$$
$$= (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda+1) - 3(\lambda-2)^2 = (\lambda-2)^2(\lambda^2 - 1 - 3) =$$
$$= (\lambda-2)^2(\lambda-2)(\lambda+2) = (\lambda-2)^3(\lambda+2).$$

Найдем корни характеристического многочлена.

$(\lambda-2)^3(\lambda+2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2,\ \lambda_4 = -2.$

Найдем собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$

Обозначим собственный вектор $\bar{y}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

$A\bar{y}_1 = \lambda_1\bar{y}_1 \Leftrightarrow (A - \lambda_1 E)\bar{y}_1 = \bar{0}.$

Получаем однородную систему

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda_1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}\bar{y}_1=\bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\bar{y}_1=\bar{0}.$$

Приведем матрицу системы к нужному нам ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim (-1 \quad 1 \quad 1 \quad 1).$$

Вернемся к системе

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 + x_4 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Найдем фундаментальную систему решений

x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1

Следовательно, любой вектор вида

$\bar{y}_1 = c_1(1,1,0,0) + c_2(1,0,1,0) + c_3(1,0,0,1)$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}, c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \neq 0$ является собственным вектором, отвечающим собственным значениям $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. То есть собственному значению кратности 3 отвечает собственное подпространство размерности 3. В качестве базиса этого подпространства можно взять, например, векторы $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$.

$\lambda_4 = -2.$

Обозначим собственный вектор $\bar{y}_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

$A\bar{y}_4 = \lambda_4\bar{y}_4 \Leftrightarrow (A - \lambda_4 E)\bar{y}_4 = \bar{0}.$

Получаем однородную систему

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda_4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda_4 \end{pmatrix} \bar{y}_4 = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \bar{y}_4 = \bar{0}.$$

Приведем матрицу системы к нужному нам ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вернемся к системе

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Тогда $\bar{y}_4 = c_4(-1,1,1,1),\ c_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

В этом случае также можно составить базис из собственных векторов в исходном пространстве $\mathbb{R}^4$.

Ответ: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \bar{y} = c_1(1,1,0,0) + c_2(1,0,1,0) + c_3(1,0,0,1)$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}, c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \neq 0;\ \lambda_4 = -2,\ \bar{y}_4 = c_4(-1,1,1,1),\ c_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Примечание 2. Случай, когда матрицу оператора не удается привести к диагональному виду сложнее. Мы не будем его рассматривать, отметим только, что в этом случае используется, так называемая, жорданова нормальная форма матрицы. См., например, В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Линейная алгебра, Классический университетский учебник, Москва, Физматлит, 2007, стр. 142.

Обозначим характеристический многочлен $\varphi_A(\lambda) = |A - \lambda E|$.

Сформулируем без доказательства теорему. Доказательство см., например, В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Линейная алгебра, Классический университетский учебник, Москва, Физматлит, 2007, стр. 133.

Теорема 5.10 (Гамильтон – Кэли). При подстановке в характеристический многочлен вместо λ самой матрицы A получается нулевая матрица.

Проиллюстрируем теорему ***примером:***

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 - 10 = \lambda^2 - 5\lambda - 6.$

Рассмотрим соответствующую матрицу из формулировки теоремы:

$$A^2 - 5A - 6E. \qquad (5.23)$$

Далее,

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 25 & 26 \end{pmatrix}$.

И выражение (5.23) примет вид:

$A^2 - 5A - 6E = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 25 & 26 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

что и утверждалось. ◄