МГУ им. М. В. Ломоносова

Лекции по математическому анализу

Предел последовательности. Предел функции и непрерывность.

Химический факультет

2025

Оглавление

Лекция 1

Множество, мощность множества

Под *множеством* мы будем понимать любую совокупность некоторых объектов, а сами объекты будем называть *элементами множества*. Чаще всего множества обозначаются большими латинскими буквами. Например, запись $A = \{x, y, z\}$ означает, что множество A состоит из трёх элементов: x, y и z.

Множества называются *равными*, если состоят из одних и тех же элементов. *Пустое множество* – это множество, не содержащее ни одного элемента.

Если множество состоит из конечного числа элементов, то можно говорить о количестве элементов этого множества. Например, множество A выше состоит из трёх элементов. Однако для множеств, состоящих из бесконечного числа элементов, понятие количества не имеет смысла, поэтому говорят о *мощности множества*, то есть понятие мощности обобщает понятие количества на случай бесконечных множеств. Для конечных множеств мощность и количество – слова – синонимы.

Множества могут задаваться с помощью описания свойств, которым удовлетворяют элементы этих множеств однако такой способ может привести к возникновению противоречий (см. парадокс Рассела). Одним из способов разрешить эти противоречия является введение аксиом (см. систему аксиом Цермело – Френкеля). Подробнее об этом можно прочитать в книге К. Куратовского и А. Мостовского “Теория множеств”.

Основные числовые множества

Система аксиом Цермело – Френкеля позволяет построить все основные множества, необходимые для нашего курса. Мы не останавливаемся на подробном построении, а интересующиеся могут прочитать подробности в книге Э. Ландау “Основы анализа”.

Перечислим основные числовые множества, с которыми мы встретимся в курсе.

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Мы считаем все его свойства известными из школьного курса. Более подробно о его определении (помимо книги Э. Ландау) можно прочитать в книге В. А. Зорича “Математический анализ”, часть 1 (определение даётся с помощью индуктивного множества). Во многих учебниках по соответствующей тематике можно увидеть построение множества натуральных чисел с помощью аксиом Пеано. Отметим, что сумма и произведение натуральных чисел снова является натуральным числом, а разность и частное – необязательно. Кроме того, если рассмотреть любое непустое множество, состоящее из некоторых (необязательно всех) натуральных чисел (то есть *подмножество*) натуральных чисел, то в нём всегда найдётся наименьший элемент. Все перечисленные свойства легко выводятся из определения натуральных чисел через индуктивное множество или из аксиом Пеано (см. В. А. Зорич “Математический анализ”, часть 1). Для наших целей удобнее считать, что наименьшим элементом множества натуральных чисел является число 1, хотя в некоторой литературе принято начинать натуральные числа с нуля.

– множество целых чисел, состоящее из всех натуральных чисел, числа нуль и чисел, противоположных натуральным. Результаты всех арифметических операций над целыми числами, кроме деления, снова дают целое число.

– множество рациональных чисел. Рациональное число представляет собой отношение двух целых чисел, то есть обыкновенную дробь вида $\frac{m}{n}$, где $m \in,\ n \in /\{0\}$, то есть одно и то же рациональное число может быть представлено в виде бесконечного числа дробей, например,

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{-7}{-14} = \ldots .$$

При этом все эти дроби соответствуют единственной точке на числовой прямой (построение числовой прямой мы обсудим в следующей лекции). Чтобы избежать неоднозначности, мы назовём рациональным число, представимое в виде $\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ и $(m, n) = 1$. Например, если исходить из нашего определения, то $\frac{1}{2}$ и $-\frac{3}{2}$ – рациональные числа, а $\frac{3}{6}$ – нет, так как $(3, 6) = 3 > 1$.

Все свойства обыкновенных дробей и арифметических действий над ними мы считаем известными из школьного курса и будем опираться на них в наших рассуждениях. Множество рациональных чисел замкнуто относительно всех арифметических операций: сумма, разность произведение и частное двух рациональных чисел является рациональным числом (при этом, на 0 делить запрещено).

Простые геометрические конструкции дают примеры чисел, которые не являются рациональными. Например, в прямоугольном треугольнике с единичными катетами длина гипотенузы, как следует из теоремы Пифагора, равна числу, квадрат которого равен 2. Как мы сейчас увидим, это число не является рациональным.

Пример 1. *Рассмотрим уравнение $x^2 = 2$. Предположим, что у этого уравнения есть рациональное решение, т.е. $x = \frac{p}{q}$, где дробь $\frac{p}{q}$ несократима. Тогда $\frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$, откуда следует, что число p^2 чётное, а тогда и число p чётное, т. е. $p = 2k, k \in \mathbb{Z}$. Поэтому верно равенство $4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2$, что означает чётность числа q. Это означает, что дробь $\frac{p}{q}$ сократима вопреки нашему предположению. Таким образом, число, квадрат которого равен 2, не является рациональным, а $x^2 = 2$ – это пример уравнения, не имеющего решения в рациональных числах.*

Число $\sqrt{2}$ относится ко множеству иррациональных чисел, для множества которых можно в некоторых источниках встретить обозначение $\mathbb{I}$.

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, которое является объединением множества рациональных и иррациональных чисел. Подробнее об этом множестве и его свойствах мы напишем ниже. Есть несколько способов построения действительных чисел: с помощью бесконечных дробей, с помощью сечений Дедекинда (с помощью сечений, например, это делается в книге Э. Ландау и в первом томе учебника Г. М. Фихтенгольца) и с помощью пределов последовательностей. Мы не будем подробно останавливаться на построении вещественных чисел, о котором можно прочитать во многих учебниках по математическому анализу. На множестве вещественных чисел можно определить все основные арифметические операции, о чём ниже мы также поговорим чуть подробнее. При этом множество вещественных чисел, как и множество рациональных, оказывается замкнутым относительно всех арифметических операций. Доказательства этих фактов мы приводить не будем.

Очевидно, справедлива следующая цепочка включений: $\mathbb{N} \subset\subset\subset \mathbb{R}$.

Функции

Определение 1. *Декартовым произведением $X \times Y$ множеств X и Y называют множество всевозможных упорядоченных пар (x, y), где первый элемент x каждой пары принадлежит X, а второй ее элемент y принадлежит Y.*

Определение 2. *Функцией f, определённой на множестве X и принимающей значения во множестве Y, называется подмножество декартова произведения $X \times Y$, если выполнено следующее условие: $\forall x \in X\ \exists!$ пара $(x, y) \in f$. При этом пишут $y = f(x)$. Элемент y называют образом элемента x, элемент x – прообразом элемента y, для функции принято обозначение $f : X \to Y$.*

Множество $f(X)$ всех элементов $f(x) \in Y$ называется образом множества X. Короче это записывается так:

$$f(X) = \{y \in Y | y = f(x),\ x \in X\},$$

а само X называется прообразом множества $f(X)$.

В курсе мы будем изучать в основном функции, определённые на числовых множествах и принимающие числовые значения. Определим некоторые основные виды функций, которые будем использовать в дальнейшем.

Определение 3. *1) Функция $f : X \to Y$ называется сюръекцией (накрытием), если для всякого $y \in Y$ существует такое $x \in X$, что $y = f(x)$.*
2) Функция $f : X \to Y$ называется инъекцией (вложением), если из равенства $f(x) = f(y)$ следует, что $x = y$.
3) Функция, являющаяся одновременно сюръекцией и инъекцией, называется биекцией или взаимно-однозначным отображением.

Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая задаётся равенством $f(x) = x$, является биекцией (проверьте!), а функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задаваемая равенством $g(x) = x^2$, – нет, так как из равенства $a^2 = b^2$ не следует равенство $a = b$. Можно также сказать, что g не является сюръекцией. Функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задаваемая равенством $h(x) = x^3 - x$, даёт пример сюръекции, не являющейся инъекцией, а функция $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определяемая равенством $p(x) = e^x$, является инъекцией, но не сюръекцией (проверьте это!).

Равномощные множества

Определение 4. *Множества A и B называются равномощными или эквивалентными, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие. Другими словами, можно биективно отобразить одно множество на другое. Обозначение: $A \sim B$ (читается: "A эквивалентно B").*

Например, множества $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{x, y, z\}$ равномощны, так как, например, в соответствие 1 мы можем поставить x, в соответствие $2 - y$, а в соответствие $3 - z$. Вообще, любые два конечных множества с одинаковым числом элементов являются равномощными.

Отметим простейшие свойства равномощных множеств:

$$1)\ A \sim A;\ 2)\ A \sim B \Rightarrow B \sim A;\ 3)\ A \sim B,\ B \sim C \Rightarrow A \sim C.$$

Выполнение трёх указанных условий означает, что $\sim$ задаёт *отношение эквивалентности* на множестве всех рассматриваемых множеств (подробнее об отношении эквивалентности будет рассказано в курсе дискретной математики).

Приведём пример двух бесконечных равномощных множеств.

Предложение 1. $\mathbb{N} \sim$.

Доказательство. Покажем, как присвоить каждому рациональному числу свой номер так, чтобы любые два разные числа имели разные номера и каждое натуральное число являлось номером какого-нибудь рационального.

Назовём высотой рационального числа $\frac{m}{n}$ величину $h := |m| + n$. Так как дробь несократима, а $n \in \mathbb{N}$, то при фиксированном h знаменатель n принимает не более, чем $h - 1$

значение, а при каждом фиксированном n для m возможны только два варианта $\pm(h-n)$, поэтому различных рациональных чисел с фиксированной высотой h не более, чем $2h$.

Будем нумеровать рациональные числа по возрастанию высоты, а при фиксированной высоте – по возрастанию самих чисел. Число высоты $h=1$ всего одно – это $\frac{0}{1}$, и оно получит номер 1. Высоту $h=2$ имеют два рациональных числа: $\frac{-1}{1}$ и $\frac{1}{1}$, они получают номера 2 и 3 соответственно. Высота $h=3$ будет у чисел $\frac{-2}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}$, и эти числа получат номера 4, 5, 6 и 7 соответственно. Ясно, что между натуральными и рациональными числами таким образом будет установлено взаимно-однозначное соответствие. $\square$

Определение 5. *Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется счётным множеством.*

Таким образом, показано, что множество рациональных чисел счётно. В дальнейшем мы увидим, что существуют бесконечные несчётные множества.

Принцип полноты. Действительные числа.

Мы выпишем набор свойств, которым должны удовлетворять действительные числа. Далее можно предъявить разные способы конкретного множества, удовлетворяющего всем этим свойствам, а уже это множество назвать вещественными числами. Например в книге Э. Ландау это сделано с помощью сечений Дедекинда. Можно строить действительные числа с помощью аксиомы Архимеда и критерия Коши (оба факта встретятся в нашем курсе). Процедура, основанная на применении критерия Коши, называется пополнением множества рациональных чисел. Подробнее о понятии пополнения можно узнать из курса функционального анализа. Однако мы рассмотрим множество всех бесконечных десятичных дробей, которые будут удовлетворять всем выписанным свойствам (выполнение некоторых проверим).

Рассмотрим теперь числовые множества A и B.

Определение 6. *Говорят, что множество A лежит левее множества B, если $a \leq b$ для всяких $a \in A$ и $b \in B$.*

Например, если множество A состоит из всех рациональных чисел, меньших 10, а B состоит из всех рациональных чисел, больших 10, то A лежит левее B.

Определение 7. *Пусть множество A лежит левее B. Тогда говорят, что число c разделяет множества A и B, если $a \leq c$ и $c \leq b$ для всех $a \in A, b \in B$.*

Например, число 10 разделяет указанные выше множества A и B.

Теперь зададимся важным вопросом: если взять два подмножества множества рациональных чисел, одно из которых лежит левее другого, то всегда ли найдётся рациональное число, разделяющее два этих подмножества? Отрицательный ответ на этот вопрос будет ясен из следующего примера.

Пример 2. *Пусть $A = \{a : a > 0, a^2 \leq 2\}$, а $B = \{b : b > 0, b^2 \geq 2\}$. Тогда A лежит левее B, т.к. для всех $a \in A, b \in B$ имеем $0 \leq b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$, откуда, в силу того, что $a + b > 0$, следует, что $0 \leq b - a$. Докажем,что если число c разделяет множества A и B, то оно удовлетворяет равенству $c^2 = 2$, (при этом из примера 1 будет следовать, что c не является рациональным). Предположим противное и заметим, что $1 \leq c \leq 2$, т. к. 1 лежит во множестве A, а 2 – во множестве B.*

Возможны два случая. Если $c^2 < 2$, то существуют числа, большие c, квадрат которых также меньше 2 (поэтому c не может разделять множества A и B). Действительно, рассмотрим число $c+\frac{2-c^2}{5}$. Тогда $\left(c+\frac{2-c^2}{5}\right)^2 = c^2+2c\frac{2-c^2}{5}+\left(\frac{2-c^2}{5}\right)^2 < c^2+4\frac{2-c^2}{5}+\frac{2-c^2}{5} = 2$. Таким образом, в этом случае c не разделяет наши множества. Если же $c^2 > 2$, то найдутся числа, меньшие c, квадрат которых также больше 2. Например, возьмём число $c-\frac{c^2-2}{4}$. При возведении его в квадрат получим $c^2-2c\frac{c^2-2}{4}+\left(\frac{c^2-2}{4}\right)^2 > c^2-4\frac{c^2-2}{4} = 2$.

Таким образом, если найдётся число c, разделяющее множества A и B, то обязательно $c^2 = 2$.

Если допустить, что в этом примере множества A и B состоят лишь из рациональных чисел, то, как мы видим, может не найтись рационального числа, разделяющего два подмножества множества рациональных чисел, одно из которых лежит левее другого.

Важным свойством числового множества является принцип полноты, о котором речь идёт в следующем определении.

Определение 8. *Говорят, что для числового множества выполняется принцип полноты, если для любых двух его подмножеств, одно из которых лежит левее другого, найдётся элемент, разделяющий эти множества.*

Например, для множества натуральных чисел выполнен принцип полноты. Действительно, если A и B – два непустых подмножества множества $\mathbb{N}$ и A левее B, то наименьший элемент множества B (который есть в любом непустом подмножестве из N, как отмечалось выше), будет разделяющим элементом множеств A и B.

Множество действительных чисел, которое мы обозначим $\mathbb{R}$, должно удовлетворять ряду условий. Во-первых, сумма и произведение любых элементов этого множества снова является элементом этого множества. Кроме того, выполнены следующие свойства.

1) Для всех $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ выполнено условие *ассоциативности по сложению*:

$$a+(b+c) = (a+b)+c.$$

2) Для всех $a,\ b \in \mathbb{R}$ выполнено условие *коммутативности по сложению*:

$$a+b = b+a.$$

3) Существует *нейтральный элемент относительно операции сложения* $0 \in \mathbb{R}$, такой, что для всех $a \in \mathbb{R}$ $a+0 = a$.

4) Для всякого $a \in \mathbb{R}$ найдётся *противоположный элемент* $b \in \mathbb{R}$, такой, что $a+b = 0$ (его обычно обозначают через $-a$).

5) Для всех $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ выполнено условие *ассоциативности по умножению*:

$$a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c.$$

6) Для всех $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ выполнено условие *коммутативности по умножению*:

$$a\cdot b = b\cdot a.$$

7) Существует *нейтральный элемент относительно операции умножения* $1 \in \mathbb{R},\ 1 \neq 0$, такой, что для всех $a \in \mathbb{R}$ $a\cdot 1 = a$.

8) Для всякого $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ найдётся *обратный элемент* $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, такой, что $a\cdot b = 1$ (его обычно обозначают через a^{-1}).

Отметим, что эти свойства означают, что множество действительных чисел является *абелевой группой по сложению*, а множество всех действительных чисел без нуля является *абелевой группой по умножению.*

9) Для всех $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ выполнено условие *дистрибутивности*:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Множества, на котором выполнены эти девять свойств, называется *полем.* Помимо этих девяти свойств есть ещё два.

10) Для всех $a,\ b \in \mathbb{R}$ либо $a \le b$, либо $b \le a$, то есть любые два элемента $\mathbb{R}$ можно сравнить (множество, где сравнимы любые два элемента, называется *линейно упорядоченным*). Если $a \le b$, а $b \le c$, то $a \le c$. При этом выполнены два свойства:
а) для всех $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, таких, что $a \le b$ выполнено $a + c \le b + c$;
б) для всех $a,\ b \in \mathbb{R}$ и $c \in \mathbb{R},\ c \ge 0$ таких, что $a \le b$, выполнено $a \cdot c \le b \cdot c$.

11) На множестве вещественных чисел выполнен принцип полноты.

Отметим, что первые десять свойств выполнены и на множестве рациональных чисел, а вот свойство 11, как следует из примера 2, не выполнено.

Для вещественных чисел определена функция $|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \ge 0 \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$

Неплохим упражнением будет доказать следующее **неравенство треугольника**, справедливое для всех вещественных чисел: $|a + b| \le |a| + |b|$; кроме того, можно вывести из этого неравенства полезное следствие, также справедливое для любых действительных a и $b : ||a| - |b|| \le |a+b|$. Последнее неравенство можно получить из неравенства треугольника, используя следующее свойство модуля: $|x| = \max\{x, -x\}$.

Ниже мы проверим, что некоторые из свойств 1 – 11 выполнены на множестве всех бесконечных десятичных дробей, которые, таким образом, и будут составлять множество $\mathbb{R}$. Конечно, на множестве таких дробей выполнены все указанные свойства, но подробная проверка этого достаточно громоздка и в нашем курсе не проводится, однако интересующиеся могут найти подробности в литературе по математическому анализу (см. Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н.Чубариков “Лекции по математическому анализу”).

Бесконечные десятичные дроби

Из школьного курса математики известно, что любое рациональное число представляется в виде бесконечной периодической десятичной дроби (см., например, учебник по алгебре для 7 класса под редакцией С. М. Никольского). Например, $5 = \frac{5}{1} = 5.(0), \frac{1}{6} = 0.1(6), \frac{15}{7} = 2.(142857)$. Заметим, что если знаменатель рационального числа представляет собой произведение степеней чисел 2 и 5, то такое рациональное число является периодической дробью, период которой может быть записан как с помощью числа 0, так и с помощью числа 9. Например, $0.5 = 0.5(0) = 0.4(9)$. Мы условимся всегда использовать период из числа 0, то есть запретим периоды, состоящие из числа 9. При таком ограничении мы можем утверждать, что любое рациональное число единственным образом представляется в виде периодической десятичной дроби. Верно и обратное (можно попробовать доказать это в качестве упражнения): любой периодической десятичной дроби соответствует некоторое рациональное число.

Кроме периодических десятичных дробей, есть непериодические. Например, такой является дробь 0.101101110.... Этой дроби не соответствует никакое рациональное число. Числа, записываемые в виде непериодических десятичных дробей, называются иррациональными. Объединение множества рациональных и иррациональных чисел является множеством действительных (или вещественных) чисел, то есть **вещественное число** – это бесконечная (периодическая или непериодическая) десятичная дробь.

Нам нужно проверить выполнение свойств 1 – 11. Мы не будем подробно останавливаться на всех свойствах, а рассмотрим только некоторые из них. Отметим ещё раз, что проверку остальных можно найти в литературе, указанной в описании курса.

Для десятичных дробей мы будем использовать запись

$$\pm a_0.a_1a_2a_3..., a_0 \in \mathbb{N}_0, a_j \in \{0, 1, 2, ..., 9\}, j \in \mathbb{N}.$$

Напомним, что дроби с числом 9 в периоде мы не рассматриваем, то есть из двух возможных записей для таких дробей выбираем запись с периодом 0. Число $\pm 0.000...$ – это число 0. Числа со знаком плюс (обычно отбрасываемым) называются положительными, а со знаком минус – отрицательными. На множестве десятичных дробей вводится отношение порядка, при котором число 0 больше любого отрицательного числа и меньше любого положительного, а положительные числа сравниваются следующим образом: $a_0.a_1a_2a_3... \le b_0.b_1b_2b_3...$ если и только если эти числа равны или существует такой разряд k, что

$$a_j = b_j \ (j = 0, 1, 2, ..., k-1)$$

и $a_k < b_k$ (лексикографический порядок). Этот порядок естественным образом переносится на отрицательные дроби. Таким образом, про любые две различные десятичные дроби можно сказать, какая из них больше, то есть множество всех таких дробей является линейно упорядоченным.

На множестве десятичных дробей можно определить сложение и умножение, а также доказать, что все свойства этих операций выполнены. Для примера ниже мы покажем, как определить операцию сложения, но для этого нам понадобится следующая важная теорема, в которой устанавливается справедливость свойства 11 для десятичных дробей.

Теорема 1. *На множестве бесконечных десятичных дробей с введённым выше отношением порядка выполнен принцип полноты.*

Доказательство. Пусть подмножество A множества вещественных чисел лежит левее подмножества B. Если A состоит только из неположительных чисел, а B – только из неотрицательных, то эти множества разделяет 0.

Если в A есть положительные числа, то B состоит только из положительных чисел, поэтому минимальное значение целой части дробей, принадлежащих множеству B, не меньше 0. Выберем среди всех неотрицательных целых частей, с которых начинаются элементы B, минимальное и обозначим его через b_0. Далее рассмотрим все элементы множества B, начинающиеся с числа b_0, и выберем из чисел в первых разрядах после запятой минимальный. Обозначим его b_1. Теперь рассмотрим все элементы множества B, начинающиеся с b_0, b_1, и выберем минимальное из чисел во вторых разрядах (пусть b_2) и т.д.

Построим число $c = c_0.c_1c_2c_3...$, где $c_0 = b_0, c_1 = b_1$ и т. д. По построению $c \le b$ для всякого элемента b из B.

С другой стороны, если бы нашёлся такой элемент $a \in A$, что $c \le a$ и $c \ne a$, то существовал бы разряд k, для которого $a_k > c_k = b_k$, и $a_0 = c_0 = b_0, ..., a_{k-1} = b_{k-1}$, что означало бы наличие в A элементов, которые больше элементов из B. Тогда мы бы получили противоречие с тем, что A лежит левее B. Поэтому $a \le c$ для любого $a \in A$, и c разделяет множества A и B.

Если множество B содержит отрицательные элементы, то все элементы множества A отрицательны. Тогда мы рассмотрим все неположительные целые числа, с которых начинаются элементы множества A, выберем из них максимальный, затем выберем все те элементы из A, которые начинаются с этого максимального и возьмём минимальное число в первом разряде после запятой у этих элементов и т.д. Действуя по аналогии со случаем, когда в A есть положительные элементы, снова построим число c, разделяющее элементы множеств A и B. Таким образом, теорема доказана. $\square$

Контрольный вопрос: почему при построении числа c не может возникнуть период из девяток?

Обратим ещё внимание, что доказано лишь существование числа c, но ничего не сказано о том, единственно ли такое число. Будет полезно проверить, что для множеств из примера 2 такое число единственно, а также привести примеры множеств, для которых разделяющих чисел больше одного. Существуют ли пары подмножеств во множестве действительных чисел, одно из которых левее другого, и для которых существует конечное число разделяющих элементов, большее 1? В дальнейшем мы будем называть десятичную дробь действительным или вещественным числом.

Принцип полноты вещественных чисел позволяет определить операции сложения и умножения вещественных чисел. Для примера остановимся на определении суммы двух положительных вещественных чисел.

Итак, пусть требуется сложить вещественные числа $a = a_0.a_1a_2a_3...$ и $b = b_0.b_1b_2b_3....$ Рассмотрим множества

$$A = \{a_0 + b_0, a_0.a_1 + b_0.b_1, a_0.a_1a_2a_3 + b_0.b_1b_2b_3, ...\}$$

и

$$B = \{a_0 + 1 + b_0 + 1,\ a_0.a_1 + 0.1 + b_0.b_1 + 0.1,\ a_0.\ a_1a_2 + 0.01 + b_0.b_1b_2 + 0.01,\\ a_0.a_1a_2a_3 + 0.001 + b_0.b_1b_2b_3 + 0.001, ...\}.$$

Множество A лежит левее множества B, поэтому найдётся разделяющий эти множества элемент c. Докажем, что такой элемент единственен. Действительно, если бы существовали хотя бы два различных таких элемента (обозначим второй через c'), то, считая для определенности, что $c' < c$, мы бы смогли найти такой разряд k, что $c'_k < c_k$, а $c_0 = c'_0, ..., c_{k-1} = c'_{k-1}$. Пусть $n > k$ – первый разряд после k, такой, что $c'_n \neq 9$. Тогда была бы верна цепочка неравенств:

$$a_0.a_1...a_na_{n+1} + b_0.b_1...b_nb_{n+1} \leq c' \leq c_0.c'_1c'_2...c'_{k-1}c'_k...c'_{n-1}9 \leq c_0.c_1c_2...c_k - 10^{-n} \leq$$

$$\leq a_0.a_1...a_na_{n+1} + b_0.b_1...b_nb_{n+1} + 2 \cdot 10^{-n-1} - 10^{-n}.$$

Однако $a_0.a_1...a_na_{n+1} + b_0.b_1...b_nb_{n+1} \geq a_0.a_1...a_na_{n+1} + b_0.b_1...b_nb_{n+1} + 2 \cdot 10^{-n-1} - 10^{-n}$, поэтому получается противоречие. Таким образом, разделяющий множества A и B элемент единственен. По определению мы полагаем $c = a + b$. Произведение положительных чисел определяется аналогично, после чего все эти действия переносятся на отрицательные числа.

Докажем ещё одно полезное свойство действительных чисел.

Предложение 2. ***(Аксиома Архимеда).*** *Для любого положительного вещественного числа a существует такое натуральное число n, что $na \geq 1$ (с помощью кванторов: $\forall\ a \in \mathbb{R}\ \wedge a > 0 \exists\ n \in \mathbb{N}:\ na \geq 1$).*

Доказательство. При $a \geq 1$ подойдёт $n = 1$. Если $0 < a < 1$, то

$$a = 0.\underbrace{0...0}_{k-1 \text{ ноль}} a_k a_{k+1}...,\ a_k \neq 0.$$

Тогда при $n = 10^k$ получим $10^k a = a_k.a_{k+1}a_{k+2}... \geq 1$. □

Из аксиомы Архимеда вытекает полезное следствие.

Лемма 1. *1)* $\forall x,\ y \in \mathbb{R}:\ x < y\ \exists\ m/n \in$: $x < \frac{m}{n} < y$; *2)* $\forall x,\ y \in \mathbb{R}:\ x < y\ \exists\ c \in \mathbb{I}:$ $x < c < y$.

Доказательство. 1) $y - x > 0$, поэтому в силу аксиомы Архимеда существует такое число $k \in \mathbb{N}$, что $k(y - x) > 1$, а тогда $2k(y - x) > 2$, поэтому между числами $2kx$ и $2ky$ найдётся число $m \in$ (например, $m = [2ky] - 1$, где $[2ky]$ – наибольшее целое число, не превосходящее $2ky$). Полагая $2k = n$, имеем $nx < m < ny$, что равносильно $x < \frac{m}{n} < y$.
2) Из 1) следует, что найдётся такое рациональное число p/q, что $\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{p}{q} < \frac{y}{\sqrt{2}}$. Тогда $c = \frac{p\sqrt{2}}{q}$. □

Более просто свойство 1 формулируется так: между любыми двумя различными действительными числами лежит рациональное число. В свойстве 2 утверждается то же самое, но про иррациональное число.

Из примера 1 следует, что существуют уравнения с рациональными коэффициентами, не имеющие решения в рациональных числах, например, $x^2 = 2$. Корень этого уравнения не является рациональным. Это наблюдение как раз демонстрирует необходимость расширения поля рациональных чисел до поля вещественных чисел (определение поля содержится, например, в книге Э. Б. Винберга “Курс алгебры”). Однако можно сказать, что и вещественных чисел недостаточно для того, чтобы все уравнения с рациональными коэффициентами имели решения. Примером такого уравнения может служить $x^2 + 1 = 0$. Поле действительных чисел допускает дальнейшее расширение, позволяющее решать уравнения, аналогичные приведённому выше. Такое расширение (поле комплексных чисел) будет изучаться в курсе линейной алгебры. Множество всех комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$.

Лекция 2

Лемма о вложенных и стягивающихся отрезках

Пусть даны два вещественных числа a и b, причём $a \le b$. Множество

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \le x \le b\}$$

называется **отрезком** множества действительных чисел.

Определение 9. *1) Системой вложенных отрезков называется множество M, состоящее из отрезков, в котором для любых $I_1, \ I_2 \in M$ выполнено либо условие $I_1 \subset I_2$, либо условие $I_2 \subset I_1$.*
2) Если при этом в M все отрезки занумерованы, и любой отрезок с большим номером содержится в любом отрезке с меньшим номером, то множество M называют ***последовательностью вложенных отрезков.***

Длиной отрезка $[a, b]$ назовём число $|[a, b]| := b - a$.

Определение 10. *Последовательность вложенных отрезков называется стягивающейся, если для любого числа $\varepsilon > 0$ в этой последовательности найдётся отрезок, длина которого меньше ε.*

Теорема 2. ***(Лемма о вложенных отрезках)*** *1) Пусть дана система M вложенных отрезков. Тогда существует такое число $c \in \mathbb{R}$, что для любого отрезка $I \in M$ имеем $c \in I$, то есть все отрезки множества M имеют общий элемент c.*
2) Если множество M является последовательностью стягивающихся отрезков, то элемент c единственен.

Доказательство. 1) Пусть A и B – множества левых и правых концов отрезков из M. Тогда $a \le b$ для любых $a \in A$ и $b \in B$, так как либо отрезок с левым концом a содержится в отрезке с правым концом b, либо наоборот. Таким образом, A лежит левее B, поэтому по принципу полноты существует число $c \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее неравенствам $a \le c \le b$ при всех $a \in \ A, b \in B$, поэтому c принадлежит всем отрезкам из системы M.

2) Уже доказано, что общая точка c есть. Предположим, что есть ещё одна общая точка c', $c' < c$ (если $c' > c$, то просто переименуем точки). Тогда длины всех отрезков не могут быть меньше числа $\varepsilon := c - c' > 0$, что противоречит определению последовательности стягивающихся отрезков. Поэтому у стягивающихся отрезков ровно одна общая точка. □

В доказательстве было важно лишь то, что для любой пары отрезков можно утверждать, что один в другом содержится. На самом деле можно ослабить и это требование, предположив, что любая пара отрезков из системы всех отрезков пересекается. В качестве упражнения можно проверить, что у такой системы отрезков будет общая точка, причём доказательство фактически не изменится.

Лемма о вложенных отрезках называется ещё принципом полноты Кантора. Важно отметить, что из этой леммы и аксиомы Архимеда выводится принцип полноты, то есть в системе аксиом для действительных чисел можно вместо аксиомы 11 использовать аксиому Архимеда и лемму о вложенных отрезках, причём вместо этой леммы можно требовать, чтобы любая система отрезков, в которой любые два пересекаются, имела общую точку.

Пусть $a < b$. **Интервалом** будем называть множество $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$. Отметим, что аналогичное лемме о вложенных отрезках утверждение для интервалов неверно, так как, например интервалы вида $J_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ не имеют в пересечении ни одной точки. Действительно, эти интервалы состоят только из положительных чисел, но из аксиомы Архимеда имеем, что для любого положительного числа a существует такое натуральное k, что $a \geq \frac{1}{k}$, а тогда при всех $n > k$ интервалы J_n не содержат a. С другой стороны, число 0 принадлежит всем интервалам последовательности $J'_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Таким образом, причина того, что утверждение для интервалов не работает, состоит в том, что интервалы, в отличие от отрезков, не содержат ограничивающие их числа.

Используя лемму о вложенных отрезках, докажем, что *множество всех чисел любого отрезка* $[a, b]$, *где* $a < b$, *не является счётным.* Действительно, предположив противное, будем считать, что все точки отрезка занумерованы. Пусть $x_1, y_1 \in (a, b),\ x_1 < y_1$. Один из отрезков $[a, x_1],\ [x_1, y_1],\ [y_1, b]$ не содержит точку отрезка $[a, b]$ с номером 1. Предположим, что это отрезок $[y_1, b]$ и снова разобьём его на три части, а затем выберем ту, которая не содержит точку отрезка $[a, b]$ с номером 2. После k таких шагов получим отрезок, не содержащий первые k точек отрезка. Если продолжать этот процесс до бесконечности, то получим, что пересечение всех построенных отрезков не содержит ни одной точки отрезка $[a, b]$. С другой стороны, это последовательность вложенных отрезков, поэтому получаем противоречие с теоремой 1. Мощность множества всех точек отрезка $[0, 1]$ будем называть *мощностью континуума.*

Построение вещественной прямой

Рассмотрим геометрическую интерпретацию действительных чисел.

Рациональные числа обычно представляют точками на прямой: отмечается точка ноль, являющаяся началом отсчёта, а затем вправо от этой точки откладывают единичный отрезок, правый конец которого соответствует числу 1. Любое натуральное число можно теперь получить, откладывая нужное число раз единичный отрезок от числа 1 вправо. Разделив единичный отрезок на q равных частей (это мы умеем делать, так как можем получить точку, соответствующую любому натуральному числу, а тогда можно на другой прямой отложить натуральное число q, а затем воспользоваться теоремой Фалеса) и взяв одну такую часть, мы получим отрезок длины $1/q$, а затем, откладывая такой отрезок вправо от нуля p раз, получим точку, соответствующую обыкновенной дроби p/q. Симметрично отражая все построенные точки относительно начала отсчёта, можем получить точки, соответствующие на прямой всем рациональным числам.

Построим на прямой положительное вещественное число $a = a_0, a_1a_2 \ldots$. Для этого сначала отметим на прямой точку, соответствующую целому неотрицательному числу a_0, а затем разобьём отрезок $[a_0, a_0 + 1]$ на 10 равных частей. После этого выберем $(a_1 + 1)$-й отрезок из этих десяти, разобьем его снова на 10 равных частей, выберем из этих новых десяти отрезков $(a_2 + 1)$-й и т.д.. Построенные отрезки обладают тем свойством, что любой отрезок, построенный на очередном таком шаге, содержится во всех, построенных на предыдущих шагах. По лемме о вложенных отрезках все эти отрезки имеют единственную общую точку. Эта точка и соответствует числу a.

При такой геометрической интерпретации можно сказать, что принцип полноты означает, что при выбранных начале отсчёта (то есть точке, соответствующей нулю) и единичном отрезке любая точка прямой соответствует единственному действительному числу, а всякое действительное число соответствует единственной точке на прямой. Прямая, точкам которой поставлены в соответствие действительные числа, называется **вещественной прямой**.

Отметим, что уже сам тот факт, что мы ставим в соответствие неопределяемому геометрическому объекту (точке на прямой) число, не позволяет строго утверждать, что получено взаимно-однозначное соответствие. Чтобы такое соответствие было получено, нужно ввести на множестве точек на прямой соответствующую систему аксиом. Мы здесь не вникаем в подробности и будем пользоваться геометрической интуицией. Итак, построенное соответствие между точками прямой и вещественными числами считаем взаимно-однозначным в том смысле, что каждой точке ставится в соответствие своя единственная бесконечная десятичная дробь, а этой дроби – соответствующая точка прямой. Несколько иной подход можно изучить в первом томе книги В. А. Зорича.

Напомним, что на прямой множество, которое мы назвали отрезком, – это множество всех точек, лежащих между двумя данными, включая сами эти точки, а интервал – множество всех точек между двумя данными, не включая концы.

Определим ещё некоторые множества на прямой. Множества точек вида

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R}:\ a < x \le b\} \text{ и } [a,b) = \{x \in \mathbb{R}:\ a \le x < b\}$$

называются **полуинтервалами.** Интервалы, отрезки и полуинтервалы называют конечными числовыми промежутками.

Множества точек вида $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}:\ x > a\}$ и $(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R}:\ x < a\}$ называются **открытыми лучами,** а множества вида $(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R}:\ x \le a\}$ и $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}:\ x \ge a\}$ называются **замкнутыми лучами.**

Кроме того, **окрестностью** точки a вещественной прямой называется любой интервал, содержащий эту точку. Для окрестностей точки a обычно используют обозначения $U(a), V(a)$. Если число $\varepsilon > 0$, то **ε-окрестностью** точки a называется интервал вида $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Другими словами, это интервал с центром в точке a длины 2ε. Обозначения: $U_\varepsilon(a), V_\varepsilon(a)$.

Очевидно, что для любой окрестности точки a можно указать содержащуюся в ней ε-окрестность, и, наоборот, в любой ε-окрестности точки a содержится некоторая её окрестность.

Проколотой ε-окрестностью точки a называется объединение $(a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$. Обозначения: $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a), \overset{\circ}{V}_\varepsilon(a)$.

Числовые последовательности

Определение 11. *Функция, $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, определённая на множестве натуральных чисел и принимающая значения во множестве действительных чисел, называется числовой последовательностью. Значения $f(n)$ функции f обозначают a_n. Последовательность также часто обозначают $\{a\}_{n=1}^{\infty}$, отождествляя её с множеством её значений.*

Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ называются элементами последовательности. Элементов последовательности всегда бесконечно много, но разные элементы могут представляться одним и тем же вещественным числом. Например, a_n может равняться 1 при любом $n \in \mathbb{N}$, и тогда элементы последовательности запишутся друг за другом в виде $\{1,1,1,1\ldots\}$.

Последовательности могут задаваться различными способами, и сейчас мы обсудим некоторые из них.

Первый и самый распространённый способ задания последовательности – с помощью формулы. Например, $a_n = 1/n, b_n = (-1)^n, c_n = 5$ и т.д..

Второй способ – задание последовательности с помощью рекуррентной формулы: задаётся явно несколько начальных элементов последовательности, а остальные выражаются с помощью уравнения через уже заданные. Например, $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. С помощью этой формулы мы можем найти $a_3 = 1 + 1 = 2, a_4 = 2 + 1 = 3, a_5 = 3 + 2 = 5$ и так далее. Эта последовательность называется последовательностью Фибоначчи в честь знаменитого итальянского математика Леонардо Пизанского. Ещё один пример последовательности, заданной рекуррентно: $a_1 = 1, a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}}$. Читатели, встречавшие понятие цепной дроби при изучении математики, могут узнать в этой последовательности набор подходящих дробей для числа, обратного к известному как золотое сечение и равного $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Интересна связь этой последовательности с введённой чуть выше последовательностью Фибоначчи. Подробнее об этом можно прочитать в книге Г. Б. Аракеляна "Математика и история золотого сечения". При более подробном изучении цепных дробей полезной будет книга В. И. Арнольда "Цепные дроби".

Этим не исчерпываются все возможные способы задания последовательностей. Мы остановимся на ещё одном важном примере – десятичном приближении числа.

Пример 3. *Как известно, число* $\sqrt{2} = 1,4142135623...$ *является иррациональным. Зададим последовательность* $\{a\}_{n=1}^{\infty}$ *следующим образом:* $a_1 = 1, a_2 = 1.4, a_3 = 1.41, a_4 = 1.414...$. *Отметим, что* $|\sqrt{2} - a_n| < 10^{-n+1}$ *и что любой элемент нашей последовательности является рациональным числом. Такая последовательность называется* ***последовательностью десятичных приближений*** *числа* $\sqrt{2}$. *Таким же способом можно приблизить и любое действительное число. Например, дробь* $0.(5)$ *приближается числами 0.4, 0.49, 0.499... .*

Вообще, с любым действительным числом можно отождествить последовательность приближений этого числа. При таких приближениях существенны вопросы погрешности приближения, выбора наилучшего способа приближения. Из этого примера также видно, что в окрестности любого действительного числа обязательно существуют рациональные числа, то есть нет ни одного интервала вещественной оси, в котором отсутствовали бы точки, соответствующие рациональным числам. Если в любом интервале вещественной оси лежат точки некоторого множества, то говорят, что это множество *всюду плотно* в $\mathbb{R}$. Таким образом, *множество рациональных чисел всюду плотно в вещественной оси.*

Лекция 3

Предел последовательности

Мы переходим к изучению одного из самых важных понятий не только математического анализа, но и всей математики – понятия предела. В дальнейшем с помощью предела будут определены другие фундаментальные математические понятия, например, производная и интеграл.

Определение 12. *Число A называется пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любой окрестности точки A существует такое натуральное число N, что при всех натуральных $n > N$ числа a_n лежат в этой окрестности. На языке кванторов это определение запишется так:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall U(A) \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \; a_n \in U(A).$$

Запись $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, вообще говоря, не совсем корректна, пока не доказана единственность предела, но ниже единственность будет доказана.

Это определение означает, что какую бы малую окрестность, содержащую точку A, мы ни взяли, лишь конечное число элементов последовательности будет лежать вне этой окрестности.

Более стандартным и чаще применяемым является следующее определение предела последовательности.

Определение 13. *Число A называется пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любого положительного числа ε существует такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполнено неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. На языке кванторов это определение запишется так:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \; |a_n - A| < \varepsilon.$$

Полезное упражнение: доказать равносильность обоих определений предела. Последовательность, имеющую предел, называют **сходящейся**.

Целой частью числа $x \in \mathbb{R}$ будем называть целое число k, удовлетворяющее неравенствам $k \le x < k+1$. Число k будем обозначать $[x]$. Например, $[1,7] = 1, \; [-3,6] = -4$. Число $x - [x]$ будем называть *дробной частью числа* x и обозначать $\{x\}$.

Пример 4. *1) Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Действительно, нужное неравенство запишется в виде $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому если взять $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, то при всех натуральных $n > N$ неравенство $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ выполняется, а значит, предел есть. Обратим внимание, что при доказательстве мы пользовались вторым определением предела. С помощью первого определения можно доказать так: возьмём правый конец интервала $U(0)$ (пусть это число b) и выберем n так, чтобы выполнялось неравенство $n > \left[\frac{1}{b}\right] + 1$ (это возможно в силу аксиомы Архимеда). Тогда при всех таких n имеем $0 < 1/n < b$, то есть все элементы последовательности принадлежат окрестности $U(0)$.*

2) Последовательность $b_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ не имеет предела. Действительно, справедливы следующие выкладки: $b_{2k} - b_{2k-1} = 2 - \frac{1}{2k(2k-1)} > 1$, поэтому никакие два элемента этой последовательности с номерами $2k$ и $2k-1$ не лежат в интервале, длина которого меньше 1, поэтому не выполнено первое определение. Для доказательства по второму определению предположим противное: пусть B – предел этой последовательности. Тогда для $\varepsilon = 1/4$ найдутся достаточно большие n, при которых $|b_{2n} - B| < 1/4$

и $|b_{2n-1} - B| < 1/4$. Тогда из неравенства треугольника получается следующая цепочка неравенств: $1 < |b_{2n} - b_{2n-1}| \leq |b_{2n} - B| + |b_{2n-1} - B| < 1/2$, то есть приходим к противоречию.

3) Хорошее упражнение: доказать, что пределом рекуррентно заданной последовательности $a_1 = 1, a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}}$ является число $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Позже мы сформулируем и докажем теорему, с помощью которой это можно сделать. Отметим также, что $1 + \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$, где F_n – n-е число известной последовательности Фибоначчи. Число $\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ – это известное золотое сечение.

Запишем также определение того, что число A не является пределом последовательности.

Определение 14. *Число A не является пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если найдётся такое положительное число ε, что для каждого натурального числа N существует такое натуральное $n > N$, что выполнено неравенство $|a_n - A| \geq \varepsilon$. На языке кванторов:*

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} : \exists n > N |a_n - A| \geq \varepsilon.$$

Если это верно при всех вещественных A, то говорят, что последовательность $\{a_n\}$ не имеет предела.

Отметим, что везде в примере 2 мы заранее знали, чему равен предел или то, что предел отсутствует. Важной является задача, при которой требуется найти число, являющееся пределом последовательности. В этом помогают свойства предела, к изучению которых мы переходим.

Свойства пределов

Докажем, что определение предела корректно, то есть что если предел последовательности существует, то он единственен.

Предложение 3. *Пусть у последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует предел. Тогда этот предел единственен.*

Доказательство. От противного: пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ и } \lim_{n\to\infty} a_n = B, \; A \neq B.$$

Тогда $|A - B| = \varepsilon_0 > 0$. По определению предела для $\varepsilon_0/2$ найдётся такой номер $N_1 \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N_1$ имеем $|a_n - A| < \varepsilon_0/2$. Для этого же $\varepsilon_0/2$ найдётся такой номер $N_2 \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N_2$ имеем $|a_n - B| < \varepsilon_0/2$. Тогда при $n > \max\{N_1, N_2\}$, применяя неравенство треугольника, получим

$$\varepsilon_0 = |A - B| = |A - a_n + a_n - B| \leq |A - a_n| + |a_n - B| < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0.$$

Противоречие. □

Определение 15. *Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется ограниченной, если существуют такие числа $c, C \in \mathbb{R}$, что $c \leq a_n \leq C$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Равносильным определением будет следующее: последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется ограниченной, если существует такое число $M > 0$, что $|a_n| \leq M$ при всех $n \in \mathbb{N}$.*

Предложение 4. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Обозначим нашу последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и положим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Тогда из определения предела следует, что для $\varepsilon = 1$ при всех натуральных n, больших некоторого $N \in \mathbb{N}$, выполнено неравенство $|a_n - A| < 1$, которое при раскрытии модуля можно записать так: $A - 1 < a_n < A + 1$. Это значит, что при всех натуральных $n > N$ последовательность $\{a_n\}_{n=N+1}^{+\infty}$ ограничена.

Элементов, не входящих в эту последовательность, лишь конечное число: $a_1, a_2, ..., a_N$. Если теперь мы выберем максимальное из чисел $|a_1|, |a_2|, ..., |a_N|, ...|A-1|$ и $|A+1|$, и обозначим это максимальное значение через M, то уже для всех элементов последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ будет выполнено неравенство $|a_n| \le M$, чем и доказана ограниченность. □

Легкое упражнение: убедитесь, что обратное неверно, то есть из ограниченности последовательности не вытекает, что эта последовательность сходится.

Предложение 5. ***(Лемма об отделимости)****. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ и $A \neq 0$. Тогда существует такое натуральное число N, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|a_n| > \frac{|A|}{2}$.*

Замечание. Это предложение о том, что если предел последовательности не равен нулю, то, начиная с некоторого номера, все элементы последовательности не просто не равны нулю, а отделены от него некоторым числом (откуда и название: лемма об отделимости). Другими словами, среди элементов последовательности не может найтись сколь угодно малых, а поэтому числа $1/a_n$ не могут быть по модулю больше некоторой фиксированной величины.

Доказательство. В определении предела возьмём $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$. Для этого ε по определению найдётся такое натуральное число N, что при всех $n > N$ будет верно неравенство $|a_n - A| < \frac{|A|}{2}$. По неравенству, вытекающему из неравенства треугольника (см. лекцию 1) имеем $|A| - |a_n| \le |a_n - A| < \frac{|A|}{2} \Rightarrow |A| - \frac{|A|}{2} < |a_n| \Leftrightarrow \frac{|A|}{2} < |a_n|$. Таким образом, при всех $n > N$ требуемое неравенство выполнено. □

С помощью определения предела через окрестности можно провести доказательство чуть проще: возьмём (в случае $A > 0$) интервал $\left(\frac{A}{2}, \frac{3A}{2}\right)$. Начиная с некоторого номера, все элементы последовательности лежат в этом интервале, то есть все они больше, чем $A/2$. Если $A < 0$, то проведите доказательство сами.

Теперь мы готовы к доказательству основной теоремы о свойствах пределов последовательностей.

Теорема 3. ***(Арифметика пределов)****. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Тогда:*

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \beta \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha A + \beta B$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$;

3) *если $B \neq 0$, $b_n \neq 0$ при всех натуральных n, то* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$.

Доказательство. Из определения следует, что

$$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists N_1\ \exists N_2 :\ \forall n > N_1\ |a_n - A| < \varepsilon_1 \text{ и } \forall n > N_2\ |b_n - B| < \varepsilon_1.$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при всех $n > N$ одновременно $|a_n - A| < \varepsilon_1$ и $|b_n - B| < \varepsilon_1$.

Теперь в пункте **1)** получаем с помощью неравенства треугольника при всех $n > N$: $|\alpha a_n + \beta b_n - \alpha A - \beta B| \leq |\alpha(a_n - A)| + |\beta(b_n - B)| < (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon_1$. При $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ положим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|\alpha|+|\beta|}$. Тогда при этом $\varepsilon > 0$ для всех $n > N$

$$|\alpha a_n + \beta b_n - \alpha A - \beta B| < \varepsilon.$$

Если $\alpha = \beta = 0$, то равенство в пункте 1 очевидно.

В пункте **2)** получим при всех $n > N$:

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - b_n A + b_n A - AB| \leq |b_n(a_n - A)| + |A(b_n - B)| < (M + |A|)\varepsilon_1.$$

Здесь число M взято из следующих соображений: последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ имеет предел по условию, поэтому, согласно предложению 2, ограничена, а тогда из определения ограниченности следует существование такого числа $M > 0$, что при всех натуральных n $|b_n| < M$. Теперь пусть $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M+|A|}$. Тогда при этом $\varepsilon > 0$ для всех $n > N$

$$|a_n b_n - AB| < \varepsilon.$$

Пункт **3)** сведём к пункту 2, пользуясь условием доказываемой теоремы и леммой об отделимости. Мы имеем равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right)$, поэтому если будет доказано, что у последовательности $\{\frac{1}{b_n}\}_{n=1}^{+\infty}$ есть предел, то получим, в силу пункта 2, что он есть и у произведения $a_n \cdot \frac{1}{b_n}$.

Мы докажем даже более сильный факт: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$. Действительно, при всех $n > N$ имеем, как было написано в начале доказательства, $|b_n - B| < \varepsilon_1$; справедливо также равенство $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|B-b_n|}{|B||b_n|}$. Вспоминая, что по лемме отделимости найдётся такое натуральное число N_3, что $|b_n| > \frac{|B|}{2}$, и беря $L = \max\{N, N_3\}$, будем иметь при всех $n > L$:

$$\frac{|B - b_n|}{|B||b_n|} < \frac{|B - b_n|}{|B||\frac{|B|}{2}|} < \frac{2}{|B|^2}\varepsilon_1$$

(важно осознать, почему цепочка неравенств справедлива!). Таким образом, в силу произвольности ε_1, мы доказали справедливость равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$. Теперь к последовательностям $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и $\{\frac{1}{b_n}\}_{n=1}^{+\infty}$ остаётся применить пункт 2, и третий пункт доказан. $\square$

В доказанной теореме важным является условие существования пределов каждой из последовательностей. Если одна из последовательностей имеет предел, а вторая – нет, то сумма этих последовательностей уже не будет иметь предела (проверьте!). Однако, как показывает следующий пример, возможна ситуация, когда обе последовательности не имеют предела, а их сумма будет иметь предел.

Пример 5. *Пусть $a_n = (-1)^n + 1/n, b_n = (-1)^{n+1}$. Тогда $|a_n - a_{n+1}| > 1, |b_n - b_{n+1}| > 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому ни одна из этих последовательностей не сходится. При этом $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.*

Самостоятельно приведите соответствующие примеры для произведения и частного последовательностей.

Предложение 6. ***(Переход к пределу в неравенстве)**. Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ и } \lim_{n\to\infty} b_n = B,$$

а также существует такое натуральное n_0, что $a_n \leq b_n$ при всех $n > n_0$. Тогда $A \leq B$.

Доказательство. Предположим, что это не так, то есть $A > B$. Возьмём две непересекающиеся окрестности $U(A)$ и $V(B)$. Начиная с некоторого номера N, все элементы последовательности $\{a_n\}$ лежат в $U(A)$, а элементы последовательности $\{b_n\}$ – в $V(B)$. Тогда $a_n > b_n$ при всех $n > N$. Получено противоречие. □

Контрольный вопрос: Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, а также существует такое натуральное n_0, что $a_n < b_n$ при всех $n > n_0$. Верно ли, что $A < B$? (Ответ: нет. Например, $a_n = 0$ при всех n, а $b_n = 1/n$).

Сейчас мы сформулируем и докажем лемму, позволяющую в некоторых случаях эффективно находить пределы.

Теорема 4. ***(Лемма о зажатом пределе)***. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$ *и* $a_n \le c_n \le b_n$, *при всех* n, *больших некоторого натурального* n_0. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.

Доказательство. Из определения следует, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1 \text{ и } \exists N_2 : \forall n > N_1\ |a_n - A| < \varepsilon \text{ и } \forall n > N_2\ |b_n - A| < \varepsilon.$$

Пусть $N = \max\{n_0, N_1, N_2\}$. Тогда при всех $n > N$ одновременно $|a_n - A| < \varepsilon$ и $|b_n - A| < \varepsilon$, поэтому

$$A - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < A + \varepsilon$$

при всех $n > N$, то есть $|c_n - A| < \varepsilon$, поэтому выполнено определение предела для последовательности $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. □

Бесконечно малые последовательности

Определение 16. *Последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *бесконечно малая, если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Предложение 7. *Если последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *бесконечно малая, а последовательность* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ограниченная, то последовательность* $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *бесконечно малая.*

Доказательство. По определению ограниченности имеем такое число $M > 0$, что

$$|b_n| \le M\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Так как последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N, что при всех $n > N$ $|a_n| < \varepsilon$, поэтому при всех таких n имеем $|a_n \cdot b_n| < M\varepsilon$, что в силу произвольности положительного числа ε влечёт равенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$. □

Из арифметики пределов следует, что сумма и произведение любого числа бесконечно малых последовательностей снова является бесконечно малой последовательностью.

Дадим определение предела в терминах бесконечно малых последовательностей.

Определение 17. *Число* A *называется пределом последовательности* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *если существует такая бесконечно малая последовательность* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, *что* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = A + \alpha_n$.

Предложение 8. *Определения 2 и 6 равносильны.*

Доказательство. 1) Определение 2 $\Rightarrow$ определение 6. Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \; |a_n - A| < \varepsilon,$$

поэтому, полагая $\alpha_n := a_n - A$, по определению 5 получаем, что $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая последовательность и $a_n = A + \alpha_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

2) Определение 6 $\Rightarrow$ определение 2. Если выполнено определение 6, то, так как $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой последовательностью, получим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \; |a_n - A| = |A + \alpha_n - A| = |\alpha_n| < \varepsilon,$$

то есть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел A по определению 2. $\square$

С помощью определения 6 некоторые утверждения доказывать проще (примеры задач будут на семинарах).

Лекция 4

Точная верхняя и точная нижняя грань

Определение 18. *Пусть дано непустое подмножество A множества действительных чисел. Число C называется верхней гранью множества A, если $a \le C$ при всех $a \in A$. Если множество A имеет хотя бы одну верхнюю грань, то оно называется ограниченным сверху. Наименьшая из верхних граней множества A (если она существует) называется его точной верхней гранью и обозначается* $\sup A$ *(читается: супремум.)*

Число c называется нижней гранью множества A, если $a \ge c$ при всех $a \in A$. Если множество A имеет хотя бы одну нижнюю грань, то оно называется ограниченным снизу. Наибольшая из нижних граней множества A (если существует) называется его точной нижней гранью и обозначается $\inf A$ *(читается: инфимум.)*

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется ограниченным.

Приведём ещё одно определение точной верхней грани.

Определение 19. *Число C называется точной верхней гранью множества A, если:*
1) $a \le C$ для всех $a \in A$;
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A : a > C - \varepsilon$.

Приведённые определения точной верхней грани равносильны. Действительно, если выполнено первое определение, то, во-первых, число C является верхней гранью, то есть справедливо условие 1 второго определения, а во-вторых, ни одно число, меньшее C, уже не является верхней гранью, то есть выполнено и условие 2 определения 2.

Обратно, если верно определение 2, то условие 1 означает, что число C – верхняя грань, а условие 2 – что число C является наименьшей из всех верхних граней.

В качестве упражнения дайте определение точной нижней грани, аналогичное второму из определений для верхней грани.

Приведём примеры точных верхних и нижних граней некоторых множеств.

Пример 6. ***1)*** *У любого конечного числового множества есть наибольший и наименьший элементы. Точная верхняя грань – это наибольший элемент, а точная нижняя грань – наименьший элемент.*

2) *Пусть $A = [0, 1]$. Тогда $0 \le a \le 1$ при всех $a \in [0, 1]$, поэтому множество A ограничено. При этом для любого числа $b < 1$ существует число $a \in A$ (например, $a = 1$) которое больше b, поэтому $\sup A = 1$. Рассуждая аналогично, получим, что $\inf A = 0$.*

3) *Если множество $A = (0, 1)$, то оно снова является ограниченным и для каждого числа $b < 1$ имеем $1 - b = \varepsilon_0 > 0$, поэтому если положить $a = 1 - \varepsilon_0/2$, то будут выполнены неравенства $1 > a > b$. Таким образом, $\sup A = 1$. Аналогично доказывается, что $\inf A = 0$. Важно отметить, что в примерах 1) и 2) точные верхние и нижние грани принадлежат множествам, а в пункте 3) ни супремум, ни инфимум множеству A не принадлежит.*

4) *Рассмотрим множество $A = \{(-1)^n + 1/n, n \in \mathbb{N}\}$. Будем выписывать первые его элементы: $\{0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{7}{6}, ...\}$. Мы видим, что все элементы с чётными номерами положительны. Легко доказать, что все элементы с чётными номерами, большими 2 ограничены сверху числом $3/2$, поэтому ни один элемент множества A не превысит $\frac{3}{2}$ (проведите доказательство!). Так как второй элемент множества равен $\frac{3}{2}$, то $\sup A = \frac{3}{2}$. Проверьте самостоятельно, что все нечётные элементы не больше 0 и строго больше*

-1. *При этом число* n *можно выбрать так, что* $-1+\frac{1}{2n-1}-(-1)=\frac{1}{2n-1}$ *будет меньше любого* $\varepsilon>0$, *поэтому* $\inf A=-1$. *При этом ни один элемент множества* A *не равен* -1, *так что* $\sup A\in A$, *а* $\inf A\notin A$.

Докажем, что любое у любого ограниченного сверху множества существует точная верхняя грань.

Теорема 5. *Пусть множество* A *непусто и ограничено сверху. Тогда существует* $\sup A$.

Доказательство. Пусть B – множество всех верхних граней множество A. Оно непусто, так как множество A ограничено сверху по условию. Из определения ограниченности сверху вытекает, что A левее B. По принципу полноты существует $c\in\mathbb{R}$, разделяющее множества A и B. По определению разделяющего элемента

$$a\le c\le b \text{ при всех } a\in A, b\in B.$$

В частности, отсюда следует, что c – наименьшая из верхних граней, то есть, по определению, точная верхняя грань. □

Отметим, что если в качестве аксиомы взять свойство, что всякое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань, то из этого свойства будет вытекать принцип полноты. Действительно, тогда из того, что множество A лежит левее множества B следует, что множество B состоит из элементов, каждый из которых является верхней гранью множества A, то есть множество A ограничено сверху, а тогда у него в силу нашего свойства есть точная верхняя грань, то есть число c, которое по определению не меньше всех элементов из A и не больше всех элементов из B. Это число c и будет разделяющим элементом.

Таким образом, аксиому полноты можно формулировать, требуя, чтобы у любого ограниченного сверху множества существовал супремум. Такая форма принципа полноты называется *принципом полноты Вейерштрасса.*

Теорема Вейерштрасса

Теперь мы можем сформулировать важную для дальнейшего курса теорему Вейерштрасса. Прежде всего дадим необходимые определения.

Определение 20. *Последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *называется неубывающей, если* $a_n\le a_{n+1}$ *при всех* $n\in\mathbb{N}$ *и невозрастающей, если* $a_n\ge a_{n+1}$ *при всех* $n\in\mathbb{N}$.

Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *называется возрастающей, если* $a_n<a_{n+1}$ *при всех* $n\in\mathbb{N}$ *и убывающей, если* $a_n>a_{n+1}$ *при всех* $n\in\mathbb{N}$.

Последовательности этих четырёх типов называют ещё ***монотонными.***

Например, $a_n=\frac{1}{n}$ – убывающая последовательность, а $a_n=-\frac{1}{n}$ – возрастающая последовательность.

Теорема 6. *(Вейерштрасс). Монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.*

Доказательство. Будем считать (без ограничения общности), что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ неубывающая и $A=\{a_1,a_2,a_3...\}$ – множество значений этой последовательности. Тогда по условию она ограничена сверху, поэтому по теореме 1 существует точная верхняя грань множества значений $a=\sup A$.

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. По второму определению точной верхней грани

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists a_k \in A:\ a_k > a - \varepsilon \text{ и } \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \le a < a + \varepsilon.$$

Так как последовательность монотонна, при всех $n > k$ $a_k \le a_n$, поэтому $a_n > a - \varepsilon$. Таким образом, доказано, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно взять такое натуральное число k, что для всех $n > k$ $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$, то есть для последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ выполнено определение предела.

Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ невозрастающая, то для неубывающей последовательности $\{-a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ наличие предела доказывается, как и выше, а тогда существование предела у $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ следует из арифметики предела. □

В теореме доказано даже более детальное обстоятельство: предел неубывающей и ограниченной последовательности равен её точной верхней грани.

Приведём примеры использования теоремы Вейерштрасса.

Пример 7. *1) Найдём предел рекуррентно заданной последовательности*

$$a_1 = \sqrt{c},\ c > 0,\ a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}.$$

Предполагая, что предел есть и равен A, перейдём к нему в обеих частях рекуррентного уравнения:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{c + a_n} = \sqrt{c + A} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 = A + c, \\ A \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}.$$

Докажем, что предел существует. Действительно, последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ монотонно возрастает, так как справедливо неравенство $a_1 < a_2$, а из неравенства $a_{n-1} < a_n$ следует, что

$$a_n = \sqrt{c + a_{n-1}} < \sqrt{c + a_n} = a_{n+1}.$$

Кроме того, $a_1 = \sqrt{c} < 1 + \sqrt{c}$, и из предположения $a_n \le 1 + \sqrt{c}$ следует, что

$$a_{n+1} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = \sqrt{c} + 1.$$

Таким образом, с помощью теоремы Вейерштрасса показано существование предела.

*2) Покажем, как можно вычислять приближённое значение корня заданного числа a с помощью **итерационной формулы Герона**. Пусть*

$$a_1 = a > 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right).$$

Требуется найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Предположим, что предел этой последовательности существует и равен A. Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим будем иметь: $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \ge \sqrt{a_n \cdot \frac{a}{a_n}} = \sqrt{a}$. Тогда $A \ne 0$ и мы можем перейти к пределу в равенстве $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$. Пользуясь арифметикой пределов, будем иметь:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{a}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(A + \frac{a}{A}\right) \Leftrightarrow A^2 = a \Leftrightarrow A = \pm\sqrt{a},$$

откуда получим $A = \sqrt{a}$, *так как* $A \geq \sqrt{a}$ *по теореме о переходе к пределу в неравенствах.*

Теперь необходимо доказать, что наше предположение оправдано, то есть предел последовательности существует. Мы уже доказали, что последовательность ограничена снизу, поэтому если будет доказано, что она не возрастает, то существование предела будет следовать из теоремы Вейерштрасса. Имеем:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a_n^2}{a_n}\right) = a_n,$$

чем и доказано, что последовательность не возрастает.

Число десятичных знаков при вычислении квадратного корня по это формуле растёт очень быстро, причём если при вычислениях допущена ошибка, то она исправляется в дальнейшем автоматически.

Оценим скорость сходимости последовательности. Для этого заметим, что

$$(a_{n+1} \pm \sqrt{a}) = \frac{(a_n \pm \sqrt{a})^2}{2a_n},$$

поэтому

$$\frac{a_{n+1} - \sqrt{a}}{a_{n+1} + \sqrt{a}} = \left(\frac{a_n - \sqrt{a}}{a_n + \sqrt{a}}\right)^2.$$

Пусть $\frac{a_1 - \sqrt{a}}{a_1 + \sqrt{a}} = q$, *тогда* $|q| < 1$ *и* $\frac{a_n - \sqrt{a}}{a_n + \sqrt{a}} = q^{2^{n-1}}$, *откуда получаем, что* $a_n = \sqrt{a}\frac{1+q^{2^{n-1}}}{1-q^{2^{n-1}}}$. *Таким образом,* $a_n - \sqrt{a} = \frac{2q^{2^{n-1}}}{1-q^{2^{n-1}}}\sqrt{a}$. *Величина* $q^{2^{n-1}}$ *стремится к нулю быстрее бесконечно убывающей геометрической прогрессии.*

Лекция 5

Бином Ньютона

Предположим, нам требуется найти коэффициент при ${}^3y^2$, который получается при раскрытии скобок в выражении $(x+y)^5$. Будем рассуждать следующим образом. У нас имеется произведение из пяти одинаковых множителей (сразу занумеруем их):

$$\underbrace{(x+y)}_{1}\cdot\underbrace{(x+y)}_{2}\cdot\underbrace{(x+y)}_{3}\cdot\underbrace{(x+y)}_{4}\cdot\underbrace{(x+y)}_{5}.$$

Раскрывать скобки можно так: сначала во всех множителях выберем x и получим моном x^5, потом из одного множителя выберем y, а из остальных выберем x, а тогда, так как y можно выбрать из каждом из пяти множителей, получится моном $5x^4y$ и так далее. Тогда моном x^3y^2 получится, если мы, например, из множителей 1, 2 и 3 в качестве сомножителя возьмём x, а из двух остальных множителей возьмём y. Однако этот же моном получится, если x выбрать, например, из множителей 1, 3 и 5, а из остальных множителей выбрать y. Вообще, если мы укажем три множителя, из которых возьмём x, автоматически выбирая из двух оставшихся y, то мы получим всевозможные способы, которые при раскрытии скобок дадут x^3y^2. Сложив затем x^3y^2 с собой столько раз, сколько он встретится, мы и получим коэффициент при x^3y^2. Однако как же посчитать, сколько разных сочетаний по три множителя из пяти данных мы можем выбрать? Для таких маленьких чисел, как 3 и 5 это можно сделать “в лоб”, но если бы изначально было произведение ста скобок, то посчитать количество сочетаний по три из ста стало бы сложно.

Сейчас обсудим, как бы можно было посчитать количество таких сочетаний более просто. Условимся всё время выбирать первые три множителя в любой перестановке из пяти множителей. Например, если множители расположены в порядке $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$, то берём множители 1, 2 и 3, а если они расположены в порядке $4,\ 1,\ 3,\ 5,\ 2$, то берём множители 4, 1 и 3. При этом всего существует 5! способов расположить множители (на первое место ставим любой из пяти множителей, после чего остаётся четыре варианта того, что поставить на второе место, после – ещё три варианта того, что поставить на третье место и так далее, а всего, таким образом, получается $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 5!$). Таким образом, мы получим 5! способов выбрать первые три множителя. Однако, например, если множители были расположены так: $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$, а затем так $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$, то мы получим одни и те же сочетания, так выберем в обоих случаях 1, 2 и 3. Вообще, если первые три номера остаются на месте, а последние два меняются местами, то сочетание множителей, выбранное нами, остаётся таким же. Так будет с любым сочетанием номеров на первых трёх местах, то есть каждое такое сочетание мы посчитаем дважды. Таким образом, *разных* сочетаний будет минимум в два раза меньше, то есть мы должны поделить 5! на 2. Однако если взять расположения номеров $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ и $1,\ 3,\ 2,\ 4,\ 5$ или $3,\ 2,\ 1,\ 4,\ 5$, то всё равно мы выберем то же сочетание из множителей 1, 2 и 3. Таким образом, это сочетание учтено будет столько раз, сколько можно переставить первые три сочетания между собой, сохраняя за ними первые три места, то есть 3! раз. Это верно для любого сочетания номеров на первых трёх местах, поэтому мы должны поделить 5! на 2, а после ещё и на 3!. Таким образом, количество *разных* сочетаний по три множителя составит $\frac{5!}{2!\cdot3!}$. Внизу стоит 2!, так как фактически мы рассматриваем все возможные расположения последних двух элементов.

В общем случае, если дано n одинаковых сомножителей, а мы хотим выбрать k из них ($n \geq k$), то, рассуждая также, как выше, получим $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Это число называется *биномиальным коэффициентом* и обозначается C_n^k или $\dbinom{n}{k}$.

Таким образом, коэффициент при x^3y^2 равен $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$. Если бы мы хотели посчитать коэффициент при y^5, то просто не выбрали бы x вообще, поэтому получили, что при y^5 коэффициент равен $C_5^0 = 1$ (по определению полагаем $0! = 1$). Коэффициент при xy^5 будет равен $C_5^1 = 5$.

Таким образом, справедлива формула

$$(x+y)^5 = C_5^0 y^5 + C_5^1 xy^4 + C_5^2 x^2y^3 + C_5^3 x^3y^2 + C_5^4 x^4y + C_5^5 x^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k x^k y^{5-k}.$$

В общем случае справедлива формула

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}.$$

Она и называется *биномом Ньютона.*

Заметим, что действие “выбрать x из трёх множителей” равносильно действию “не выбрать x из двух множителей”, то есть выбрать три множителя – это то же самое, что не выбрать два. Отсюда получаем равенство $C_5^3 = C_5^2$. В общем случае справедливо равенство

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Метод математической индукции

Пусть дан набор некоторых утверждений, занумерованных натуральными числами. Обозначим их $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n,\ \dots$. Предположим, что утверждение A_1 верно, а также известно, что из справедливости утверждения A_{m-1} вытекает справедливость утверждения A_m при всех натуральных m, то есть выполнение любого из этих утверждений влечёт выполнение следующего за ним. Тогда из справедливости A_1 вытекает справедливость A_2, из справедливости A_2 следует справедливость A_3 и так далее, то есть *все* утверждения верны.

На основе этого наблюдения построен способ доказательства некоторых утверждений с помощью *метода математической индукции.* Поясним, как работает этот метод, на примере доказательства бинома Ньютона (то есть дадим ещё одно доказательство этой формулы).

Предложение 9. *При любом натуральном n справедливо равенство*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k},$$

где x и y – произвольные фиксированные действительные числа.

Доказательство. В данном предложении утверждения $A_1,\ A_2,\ \dots$ – это равенства

$$(x+y)^1 = C_1^0 y + C_1^1 x,\ (x+y)^2 = C_2^0 y^2 + C_2^1 xy + C_2^2 y^2,\ \dots,$$

а нам нужно проверить, что все такие утверждения (то есть при всех $n \in \mathbb{N}$) справедливы.

Непосредственно убеждаемся, что равенство $(x+y)^1 = C_1^0 y + C_1^1 x = 1 \cdot y + 1 \cdot x$ верно.

Проверим, следует ли из равенства

$$(x+y)^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k x^k y^{m-1-k}, \tag{1}$$

равенство

$$(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k y^{m-k}.$$

Для этого домножим обе части равенства (1) на $(x+y)$:

$$(x+y)^{m-1}(x+y) = (x+y)^m = \left(\sum_{k=0}^{m-1} C_m^k x^k y^{m-1-k}\right)(x+y).$$

В правой части раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k x^k y^{m-1-k}\right)(x+y) = \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k x^{k+1} y^{m-1-k} + \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k x^k y^{m-k} = \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{m} C_{m-1}^{k-1} x^k y^{m-k} + \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k x^k y^{m-k} y = \\
&\qquad = xy^m + \sum_{k=1}^{m-1} (C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k) x^k y^{m-k} + x^m y = \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k y^{m-k}.
\end{aligned}$$

В третьей строке этой цепочки равенств мы поменяли индексы суммирования, а в конце воспользовались равенством $C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k = C_m^k$. Проверить это равенство можно непосредственно, так как

$$\frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-1-(k-1))!} + \frac{(m-1)!}{k!(m-1-k)!} = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

Таким образом, теорема доказана с помощью метода математической индукции. $\square$

Равенство

$$C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k = C_m^k$$

называется в некоторой литературе *основное биномиальное тождество.* В качестве **упражнения** попробуйте доказать его с помощью комбинаторики, не прибегая к выражениям биномиальных коэффициентов через факториалы.

Дадим в качестве упражнения ещё одно упражнение на метод математической индукции.

Упражнение *(неравенство Бернулли).* Докажите, что при всех натуральных n и действительных $x \in [-1, +\infty)$ справедливо неравенство

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Число e

В этом разделе будет определена одна из важнейших констант, встречающаяся практически во всех разделах математики, а также важная для многих приложений. Некоторые свойства этой константы мы изучим на семинарах.

Теорема 7. *Последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ имеет предел.*

Доказательство. Докажем, что эта последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху. Тогда существование предела будет следовать из теоремы Вейерштрасса.
Ограниченность. По биному Ньютона имеем:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = C_n^0\left(\frac{1}{n}\right)^0 + C_n^1\left(\frac{1}{n}\right)^1 + C_n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + C_n^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} + C_n^n\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n\cdot(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{n^3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2}{n^{n-1}} +$$
$$+ \frac{1}{n!}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n^n} = 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

(обязательно разберитесь, как получаются друг из друга эти равенства).

Теперь отметим, что $\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \le \frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k} \le \frac{1}{2^{k-1}}$, откуда получим, что $a_n \le 2 + \sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$.

Монотонность. Отметим, что $\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \le \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$ Таким образом, имеем цепочку неравенств:

$$a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \le 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \le$$
$$\le 2 + \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) = a_{n+1}$$

(почему верно последнее неравенство?).

Итак, доказаны ограниченность сверху и монотонное возрастание последовательности, поэтому она имеет предел. □

Теорему 1 можно доказать и другим способом, доказав следующий факт.

Упражнение. Пусть $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, а $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Доказать, что a_n не возрастает, а b_n не убывает и $a_k \ge b_m$ при всех натуральных k и m, а также доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Определение 21. *Числом e называют предел последовательности $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, то есть по определению полагают $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.*

Полезным **упражнением** будет доказать формулу

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\alpha_n}{n\cdot n!},\ 0 < \alpha_n < 1,$$

из которой следует иррациональность числа e.

Отметим, что число e не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами. Такие числа называются **трансцендентными.** Ещё одним примером такого числа является π.

Из доказанной теоремы можно вывести существование предела последовательности

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Этот предел называется постоянной Эйлера и обозначается буквой γ. Выпишем несколько десятичных знаков для этой постоянной: $\gamma = 0,577215664901532\ldots$. До сих пор неизвестно, трансцендентное это число или алгебраическое.

Определение 22. *Говорят, что* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *если*

$$\forall M\ \exists N:\ \forall n > N\ a_n > M.$$

Полезно сформулировать определения для последовательностей, стремящихся к $-\infty$ и к ∞. Докажем одно полезное следствие теоремы 1.

Предложение 10. *Пусть заданы последовательности* $\{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *и* $\{q_n\}_{n=1}^{+\infty}$, *причём*

$$\lim_{n\to\infty} p_n = +\infty \text{ и } \lim_{n\to\infty} q_n = -\infty.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e \text{ и } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

Доказательство. Пусть $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – последовательность целых чисел, стремящаяся к $+\infty$. Из теоремы 1 и определения 1 следует, что

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall\ n > N\ \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

Так как $n_k \to +\infty$, то существует такое $K \in \mathbb{N}$, что при всех $k > K$ имеем $n_k > N$, а тогда $\left|\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} - e\right| < \varepsilon$, откуда по определению предела получаем, что $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$.

Если числовая последовательность $\{p_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $p_k > 1$ стремится к $+\infty$, то существует такая последовательность целых чисел $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$, что $n_k \le p_k < n_k + 1$ и $n_k \to +\infty$. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}} < \left(1+\frac{1}{p_k}\right)^{p_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right),$$

причём левая и правая части стремятся к e при $k \to +\infty$, а значит, по лемме о зажатом пределе, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$.

Если последовательность $\{q_n\}_{n=1}^{+\infty}$ стремится к $-\infty$, то существует такое N, что при всех $n > N$ $q_n < -1$. При всех таких n положим $q_n = -\beta_n$, откуда получим

$$\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = \left(1-\frac{1}{\beta_n}\right)^{-\beta_n} = \left(\frac{\beta_n}{\beta_n-1}\right)^{\beta_n} = \left(1+\frac{1}{\beta_n-1}\right)^{\beta_n-1}\left(1+\frac{1}{\beta_n-1}\right) \to e$$

при $n \to +\infty$. □

Приведём пример применения последнего утверждения.

Пример 8. *Найдём предел последовательности* $a_n = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n$. *Имеем:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n+3}{2}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n+3}{2}}\right)^{-\frac{n+3-3}{2}(-2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-\frac{n+3}{2}}\right)^{-\frac{n+3}{2}}\left(1+\frac{1}{-\frac{n+3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{-2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-\frac{n+3}{2}}\right)^{-\frac{n+3}{2}}\right)^{-2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n+3}{2}}\right)^{-3} = e^{-2}\cdot 1 = \frac{1}{e^2}.$$

Отметим, что последовательность $q_n = -\frac{n+3}{2}$ *стремится к* $-\infty$, *так что мы использовали предложение 1.*

Константу e ввел Якоб Бернулли, изучая задачу об изменении процентного дохода, начисляемого по формуле сложных процентов при увеличении частоты начисления процентов. Проценты можно начислять раз в год, раз в квартал, а если частоту начислений устремить к бесконечности, то процентный доход увеличится как раз в e раз.

Подпоследовательности и частичные пределы

Определение 23. *Пусть задана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_m < \ldots$. Возьмём элементы последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ с номерами $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_m < \ldots$. Мы снова получим последовательность $b_k = a_{n_k}$, которая называется* ***подпоследовательностью*** *последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Число $a \in \mathbb{R}$ называется ***частичным пределом*** *последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если найдётся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой число a является пределом, то есть $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.*

Обратим внимание, что подпоследовательность данной последовательности образуется, если мы берём **возрастающую** последовательность номеров. Например, для последовательности $a_n = 1/n$ набор

$$\{1/2,\ 1/5,\ 1/7,\ 1/5,\ \ldots\}$$

не может образовать подпоследовательность, так как среди значений последовательности $a_n = 1/n$ элемент $1/5$ присутствует только под номером 5, а этот номер был выбран на втором шаге, поэтому дальше все элементы в любой подпоследовательности были бы с номерами, большими 5.

Можно также сказать, что частичным пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется такая точка a на вещественной оси, что для любой окрестности $U(a)$ этой точки и любого натурального числа N найдётся хотя бы одно такое $n > N$, что $a_n \in U(a)$.

Отличие понятия частичного предела последовательности от понятия предела последовательности состоит в том, что в любой окрестности точки, являющейся пределом, находятся *все*, начиная с некоторого номера элементы последовательности, а в любой окрестности частичного предела непременно *найдётся бесконечно много элементов последовательности*, но необязательно все.

Предложение 11. *Если последовательность имеет предел, то любая её подпоследовательность сходится к тому же пределу.*

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то по определению предела

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Так как номера элементов любой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ при достаточно больших k будут таковы, что $n_k > N$ и номера подпоследовательности по определению возрастают, то при всех достаточно больших k будет выполняться также и неравенство $|a_{n_k} - A| < \varepsilon$, то есть будет выполнено определение предела для любой подпоследовательности. $\square$

Таким образом, у последовательности, имеющей предел все частичные пределы совпадают с пределом самой последовательности. При этом *у любой подпоследовательности сходящейся последовательности обязательно есть предел.*

Напомним, что в теореме Вейерштрасса речь шла об ограниченной и монотонной последовательности. Что будет, если отказаться от условия монотонности? Ответ на этот вопрос даётся в следующей теореме.

Теорема 8. ***(Больцано – Вейерштрасс.)*** *Из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, то

$$\exists C > 0: \ \forall n \in \mathbb{N} \ |a_n| < C,$$

то есть все элементы последовательности содержатся в отрезке $[-C, C]$. Разделим этот отрезок пополам. Хотя бы в одном из получившихся отрезков содержится бесконечно много элементов последовательности. Выберем отрезок, в котором содержится бесконечно много элементов и назовём его I_1 (если бесконечно много элементов в обеих половинах, то выберем любую). Выберем какой-либо элемент $a_{n_1} \in I_1$ и положим $b_1 = a_{n_1}$. Разобьём отрезок I_1 пополам и выберем ту его половину, в которой содержится бесконечно много элементов последовательности. Назовём его I_2 и выберем $a_{n_2} \in I_2$ так, чтобы n_2 было больше n_1, и положим $a_{n_2} = b_2$. Затем разобьём отрезок I_2 пополам, выберем ту половину I_3, в которой содержится бесконечно много элементов последовательности, возьмём элемент $a_{n_3} \in I_3$, причём $n_3 > n_2$, и обозначим $b_3 = a_{n_3}$. Продолжая этот процесс, построим последовательность вложенных отрезков $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ и последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, причём $b_k \in I_k$ и $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ является подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

При этом $|I_k| = \frac{2C}{2^k} \to 0, \ n \to +\infty$, поэтому последовательность отрезков $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ является стягивающейся и имеет единственную общую точку b, причём для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших k выполнены неравенства

$$|b_k - b| \le \frac{C}{2^{k-1}} < \varepsilon,$$

поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$. Таким образом, мы выбрали подпоследовательность последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, имеющую предел. $\square$

Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Рассмотрим последовательность

$$M_n = \sup_{k>n} a_k.$$

С увеличением n точная верхняя грань не может увеличиться, так как супремум множества $\{a_{n+1}, \ a_{n+2}, \ \ldots\}$, равный M_n нее меньше, чем супремум множества $\{a_{n+2}, \ a_{n+3}, \ \ldots\}$, который равен M_{n+1}. Таким образом, последовательность $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает. Кроме того, $M_n \ge a_k$ при всех натуральных $k > n$, что в силу ограниченности последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ означает, что последовательность $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу. Следовательно, по теореме Вейерштрасса последовательность $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел. Аналогично доказывается, что последовательность $m_n = \inf\limits_{k>n} a_k$ имеет предел. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$, а $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = m$.

Определение 24. *Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Тогда число M называют* ***верхним пределом*** *последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, а число m –* ***нижним пределом*** *этой последовательности. Соответствующие обозначения: $M := \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $m := \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$.*

Отметим, что верхний и нижний пределы последовательности совпадают в точности тогда, когда последовательность имеет предел, что мы докажем ниже.

Теорема 9. *Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ являются частичными пределами этой последовательности и все частичные пределы последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежат отрезку $[\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n]$.*

Доказательство. Нам необходимо построить подпоследовательность, предел которой равен $M := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$. Построим эту подпоследовательность так: на первом шаге выберем элемент a_{n_1}, удовлетворяющий условиям

$$M_1 - 1 < a_{n_1} \leq M_1.$$

Это возможно в силу определения точной верхней грани, так как $M_1 - 1$ уже не является точной верхней гранью для множества $\{a_2,\ a_3,\ ...\}$, а поэтому найдётся нужный элемент.

Элемент a_{n_2} должен быть таким элементом исходной последовательности $\{a_n\}$, что $n_2 > n_1$. Выберем его так, чтобы он удовлетворял неравенствам

$$M_{n_1} - 1/2 < a_{n_2} \leq M_{n_1}.$$

Элемент, удовлетворяющий таким условиям, найдётся снова по определению точной верхней грани, а неравенство $n_2 > n_1$ выполнено, так как согласно определению M_{n_1} элемент a_{n_2} выбирается из множества $\{a_{n_1+1},\ a_{n_2+2},\ ...\}$, в котором все элементы с номерами, большими n_1.

Продолжая этот процесс, мы на $m+1$-м шаге получим элемент $a_{n_{m+1}}$, удовлетворяющий неравенствам

$$M_{n_m} - \frac{1}{m+1} < a_{n_{m+1}} \leq M_{n_m}.$$

При этом $n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_{m+1} < ...$. По определению верхнего предела,

$$\lim_{n\to+\infty} M_n := M,$$

а тогда и любая подпоследовательность последовательности $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к тому же пределу. Таким образом имеем равенства:

$$M = \lim_{k\to+\infty} M_{n_k} = \lim_{k\to+\infty}\left(M_{n_k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

Тогда, по лемме о зажатом пределе, $M = \lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k}$, то есть верхний предел является частичным пределом последовательности. Доказательство для нижнего предела полностью аналогично.

Докажем теперь, что любой частичный предел a лежит на отрезке $[\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n]$. По определению найдётся подпоследовательность $\{a_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$, которая сходится к a. Тогда $m_{n_l-1} \leq a_{n_l} \leq M_{n_l-1}$, поэтому по теореме о предельном переходе в неравенствах будем иметь $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \leq a \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$. □

Таким образом, если последовательность ограничена, то у неё есть верхний и нижний пределы, которые являются частичными пределами, то есть найдутся подпоследовательности, сходящиеся к ним. Это рассуждение может служить обоснованием теоремы Больцано – Вейерштрасса.

Теорема 10. *Ограниченная последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда у неё только один частичный предел.*

Доказательство. Необходимость этого условия – это предложение 2.

Докажем *достаточность*. Пусть a – единственный частичный предел последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда, по предыдущей теореме, $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$. По определению верхнего и нижнего предела и теореме о зажатом пределе из неравенств $m_{n-1} \leq a_n \leq M_{n-1}$ получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. □

Можно рассматривать не только ограниченные последовательности, и тогда верхний и нижний пределы могут принимать и бесконечные значения. Например, верхний и нижний предел последовательности $a_n = n$ равны $+\infty$, а для последовательности $a_n = -n$ они принимают значение $-\infty$. Для последовательности

$$a_n = (-1)^n n \text{ имеем } \varliminf_{n\to\infty} a_n = -\infty, \text{ а } \varlimsup_{n\to\infty} a_n = +\infty;$$

для последовательности $a_n = 2^{(-1)^n n}$ имеем $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Существуют последовательности, множества частичных пределов которых – отрезки (приведите примеры). Однако, например, интервал $(0, 1)$ не может являться множеством *всех* частичных пределов никакой последовательности (полезно объяснить, почему, хотя позже мы докажем теорему, из которой это будет следовать).

Лекция 6

Критерий Коши

В этом разделе мы получим для последовательности условия, равносильные существованию предела этой последовательности. Равносильность означает, что выполнение этих условий влечёт существование предела, а существование предела влечёт выполнение самих условий.

Утверждения, равносильные некоторым фактам, называют критериями этих фактов. Например, критерием того, что треугольник прямоугольный, может служить то, что сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей стороны. Это значит, что если треугольник прямоугольный, то условия для квадратов длин сторон выполнены, и если условия для квадратов длин сторон выполнены, то это прямоугольный треугольник.

Отметим, однако, что бывают утверждения, являющиеся следствиями каких-либо фактов, из которых сами эти факты не следуют (необходимые признаки). Например, из того, что каждое из слагаемых делится на 3, следует, что сумма делится на три, но из того, что сумма делится на 3 не следует, что на 3 делится каждое из слагаемых. Есть также и утверждения, из которых следуют факты, но если эти утверждения не выполнены, то факты все равно могут выполняться (достаточные признаки). Например, если мы складываем два чётных числа, то результат – это, конечно, чётное число, но чётным результат может быть не только в этом случае, а и при сложении двух нечётных чисел, то есть достаточным признаком того, что сумма чётная, является чётность каждого из слагаемых.

Сформулируем важное определение фундаментальной последовательности. Как мы затем докажем, только такие последовательности и будут сходиться.

Определение 25. *Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n,\ m > N$ выполняется неравенство $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Более коротко:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n,\ m > N\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Фундаментальность последовательности означает, что, начиная с некоторого натурального N, *все* элементы последовательности с номерами, большими, чем N, находятся друг от друга на расстоянии, меньшем произвольно выбранного малого положительного числа.

Приведём примеры.

Пример 9. *1) Последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ фундаментальна, так как при любом $\varepsilon > 0$ $|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| \le \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \le 2\max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\}$, поэтому при любом $\varepsilon > 0$ достаточно взять $N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$, тогда $2\max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} < \varepsilon$.*

2) Последовательность $a_n = (-1)^n$ не является фундаментальной, так как при $\varepsilon = 1$ для любого натурального числа N найдутся два таких номера $n = N+1$ и $m = N+2$, что элементы с этими номерами удовлетворяют неравенству $|a_{N+1} - a_{N+2}| = 2 > 1$.

В пункте 2 примера 1 мы использовали определение того, что последовательность не является фундаментальной. Запишем это определение с помощью кванторов.

$$\exists \varepsilon > 0:\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n,\ m > N:\ |a_n - a_m| \ge \varepsilon.$$

Сформулируем, наконец, основную теорему этого раздела – критерий Коши.

Теорема 11. *Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел* ***тогда и только тогда****, когда она фундаментальна.*

Выделенная жирным шрифтом фраза как раз и означает, что теорема является критерием. Из достаточности следует, что **мы можем выяснить, что у последовательности существует предел, не вычисляя этот предел непосредственно.** Существуют последовательности, где нахождение предела является более сложной задачей, чем проверка фундаментальности последовательности. Особенно хорошо это будет видно, когда мы начнём изучать бесконечные суммы, то есть ряды. Перейдём к доказательству.

Доказательство. **Необходимость.** Итак, дано, что есть предел, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Нужно доказать, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Для этого выберем такое $\varepsilon > 0$, что, начиная с некоторого номера $N \in \mathbb{N}$, при всех $n > N$ выполнено неравенство $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда при любых $n, m > N$ имеем: $|a_n - a_m| \le |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, то есть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет определению фундаментальной последовательности.

Достаточность. Дано, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Требуется доказать, что у неё есть предел.

Покажем, что последовательность ограничена. Действительно, при $\varepsilon = 1$ найдётся такое натуральное N, что при $n = N+1, m > N$ выполнено неравенство $|a_m - a_{N+1}| < 1$, а это равносильно тому, что $a_{N+1} - 1 < a_m < a_{N+1} + 1$. Так как N – фиксированное число, то можно утверждать, что, начиная с номера $N+1$, наша последовательность принадлежит интервалу $(a_{N+1} - 1, a_{N+1} + 1)$, то есть является ограниченной. За пределами интервала могут лежать только числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_N$. Тогда при всех натуральных n имеем

$$a_n \le \max\{a_1, a_2, a_3, ..., a_{N+1} + 1\} \text{ и } a_n \ge \min\{a_1, a_2, a_3, ..., a_{N+1} - 1\}.$$

Таким образом, ограниченность доказана.

Тогда, в силу леммы Больцано – Вейерштрасса найдётся сходящаяся подпоследовательность $b_k = a_{n_k}$ последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Обозначим её предел через A.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N_1 \in \mathbb{N}$, что при всех $k > N_1$ $|b_k - A| < \varepsilon$. Для этого же $\varepsilon > 0$ существует такое $N_2 \in \mathbb{N}$, что при всех $n, m > N_2$ $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Пусть $M := \max\{N_1, N_2\}$, тогда при всех $n > M$ и $k > M$ имеем $n_k > M$ (объясните, почему!) и

$$|a_n - A| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

что в силу произвольности $\varepsilon > 0$ доказывает равенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. □

Замечание. Если вспомнить первое определение предела, то необходимость условия легко понять с геометрической точки зрения. Действительно, какой бы малый интервал, содержащий предел, мы бы ни взяли, по определению все элементы последовательности, начиная с некоторого, лежат в этом интервале, а тогда расстояние между любыми двумя элементами последовательности не превосходит длины этого интервала. Достаточность же означает, что если все элементы последовательности, начиная с некоторого, умещаются в сколь угодно малом по длине интервале, то такая последовательность имеет предел.

Приведём теперь примеры применения критерия Коши при выяснении вопроса о существовании предела последовательности.

Пример 10. *1) Пусть $a_1 = 1, a_n = 1 + \frac{1}{1+a_{n-1}}$. Проверим, что так заданная последовательность фундаментальна, то есть имеет предел. Прежде всего отметим, что*

$a_n \geq 1$ при всех n. Имеем:

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{(1+a_n)(1+a_{n-1})} \leq \frac{|a_n - a_{n-1}|}{4} \leq \dots \leq \frac{|a_2 - a_1|}{4^{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}.$$

Пусть $m > n$. Тогда получим:

$$|a_m - a_n| = |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + a_{m-2} - a_{m-3} + \dots + a_{n+1} - a_n| \leq$$
$$\leq |a_m - a_{m-1}| + \dots + |a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{m-2} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{4}} =$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{m-n}\right) \leq \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n}.$$

Однако $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ меньше любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого элемента. Действительно, по неравенству Бернулли

$$\frac{1}{4^n} = \frac{1}{(1+3)^n} \leq \frac{1}{1+3n} < \frac{1}{n},$$

поэтому при заданном ε можно потребовать $\frac{1}{n} < \varepsilon$, а тогда $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Таким образом, последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Тогда по критерию Коши у неё есть предел. Обозначим этот предел через A и перейдём в равенстве $a_n = 1 + \frac{1}{1+a_{n-1}}$ к пределу, используя свойства пределов и то, что $A \geq 0$ (см. арифметику пределов и предельный переход в неравенствах). Получим:

$$A = 1 + \frac{1}{1+A} \Leftrightarrow A^2 - 1 = 1 \Rightarrow A = \sqrt{2}.$$

Отметим, что отрицательное значение A мы не рассматриваем, так как все элементы нашей последовательности положительны, поэтому предел неотрицателен, что следует из предельного перехода в неравенствах.

Отображение f, заданное на непустом подмножестве A вещественной оси, называется сжимающим, если существует такое $q \in (0,1)$, что для любых $x, y \in A$ справедливо неравенство $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$. При этом q называется коэффициентом сжатия. *Из неравенства $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{|a_n - a_{n-1}|}{4}$ следует, что отображение, задаваемое функцией $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$ $(x > 1)$ является сжимающим, причём $q = 1/4$. Легко видеть по рассуждениям выше, что* ***любая последовательность, заданная рекуррентно с помощью сжимающего отображения, фундаментальна, а потому имеет предел*** *(подробнее см. семинарские листки). В качестве упражнения можно проверить, что если отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ сжимающее, то обязательно найдётся такая точка $x \in \mathbb{R}$, что $f(x) = x$. Такая точка x называется* ***неподвижной точкой.*** *Сжимающие отображения можно рассматривать не только на вещественной оси, и они широко используются в теории дифференциальных и интегральных уравнений, а также при численных решениях уравнений.*

2) *Рассмотрим теперь последовательность $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Докажем, что она не является фундаментальной. Для этого нужно доказать, что при некотором $\varepsilon > 0$ для любого натурального N найдутся такие натуральные $m, n > N$, что $|a_m - a_n| \geq \varepsilon$. Действительно, пусть задано натуральное N. Возьмём $n = N + 1$, $m = 2N + 2 = 2n$.*

Тогда получим:

$$|a_{2n} - a_n| = \left|1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - ... - \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}\right| \geq$$
$$\geq \underbrace{\left|\frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n}\right|}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для любого натурального N найдутся два таких номера $m, n > N$, что $|a_m - a_n| \geq \frac{1}{2}$, то есть последовательность не является фундаментальной, поэтому у неё нет предела.

Лекция 7

Предельные точки множеств

В этой лекции речь будет идти только о числовых множествах. Предельные точки произвольных числовых множеств нам потребуются при изучении пределов функций. Мы обсудим некоторые свойства предельных точек и приведём примеры множеств и их предельных точек. Нам потребуются некоторые вспомогательные понятия и утверждения, играющие важную роль в анализе.

Определение 26. *Система множеств $S = \{X\}$ называется покрытием множества Y, если $Y \subseteq \bigcup\limits_{X \in S} X$.*

Другими словами, для любой точки y множества Y найдётся такое множество X, принадлежащее системе S, что $y \in X$. Система множеств – это некоторый набор множеств, то есть множество, элементами которого являются множества. Подмножества системы множеств S будем называть подсистемой системы S.

Докажем полезное свойство отрезка вещественной оси.

Теорема 12. *(**Принцип Бореля – Лебега.**) Пусть система интервалов $S = \{J\}$ является покрытием отрезка $I = [a, b]$. Тогда из системы S можно выбрать конечную подсистему, также являющуюся покрытием I.*

Доказательство. Предположим противное. Разделим отрезок I пополам и и выберем ту его половину, которая не покрывается конечным числом интервалов, принадлежащих системе S (если обе половины не покрываются, то выберем любую из них). Назовём выбранную половину I_1, снова разделим её пополам и выберем половину, которая не покрывается конечным числом интервалов системы S. Назовём её I_2 и так далее.

Получим последовательность вложенных отрезков $I \supset I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ...$, причём $|I_n| = \frac{|I|}{2^n}$, поэтому эта последовательность является стягивающейся, а тогда по лемме о стягивающихся отрезках существует единственная точка c, принадлежащая каждому отрезку из построенной последовательности. Так как $c \in I$, то найдётся интервал (α, β), принадлежащий системе S и содержащий точку c. Пусть $\varepsilon = \min\{c - \alpha, \beta - c\}$. В последовательности вложенных отрезков выберем отрезок I_k с длиной $|I_k| < \varepsilon$. Такой отрезок содержится в интервале (α, β), но, с другой стороны, он по построению последовательности вложенных отрезков не покрывается конечной подсистемой интервалов системы S. Противоречие. $\square$

Пример 11. *1) Система интервалов $S_1 = \{(0, 1 - \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$ не покрывает отрезок $[0, 1]$, так как точки 0 и 1 не содержатся ни в каком из этих интервалов.*

Система $S_2 = \{(-\frac{1}{n}; 1, 2 - \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ покрывает отрезок $[0, 1]$, поэтому можно выбрать конечную подсистему интервалов, покрывающую этот отрезок. Например, можно взять подсистему из одного интервала $(-0, 01, 1, 19)$, так как это интервал содержит отрезок $[0, 1]$.

2) Аналогичное теореме 1 утверждение для интервалов неверно. Например, та же система S_1 покрывает интервал $(0, 1)$, но нельзя выбрать из S_1 конечную подсистему, также покрывающую интервал $(0, 1)$ (докажите это в качестве упражнения).

Определение 27. *Точка a называется предельной точкой множества X, если в любой окрестности точки a содержится бесконечно много элементов множества X.*

Равносильным определением является следующее определение.

Определение 28. *Точка a называется предельной точкой множества X, если в любой проколотой окрестности точки a содержится хотя бы один элемент множества X.*

Упражнение: докажите равносильность эти определений.

Отметим, что из определения следует отсутствие у пустого множества и любого множества, состоящего из конечного числа элементов, предельной точки. Отметим, однако, что частичные пределы последовательности могут существовать даже тогда, когда множество её значений конечно, так как в этом случае речь идёт о том, чтобы в любой окрестности (не проколотой!) частичного предела лежало бесконечно много элементов последовательности, то есть, в частности, все эти элементы из окрестностей могут принимать значение, равное частичному пределу. Примером может служить последовательность $a_n = (-1)^n$, у которой два значения, каждое из которых является частичным пределом. При этом множество значений последовательности конечно, поэтому не имеет ни одной предельной точки.

Приведём примеры на нахождение предельных точек множеств.

Пример 12. ***1)*** *Пусть множество $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Тогда единственной предельной точкой этого множества является точка 0.*

2) *У интервала $(0,1)$, как и отрезка $[0,1]$ множество предельных точек – это весь отрезок $[0,1]$, потому что в любой окрестности любой из точек отрезка $[0,1]$ содержится бесконечно много других точек этих множеств.*

3) *Множеством предельных точек для всех рациональных чисел служит всё множество $\mathbb{R}$, так как в любой окрестности любого действительного числа бесконечно много различных рациональных чисел (подробнее см. первую и вторую лекции).*

Изучая частичные пределы последовательностей, мы формулировали и доказывали теорему Больцано – Вейерштрасса. Теперь докажем её аналог для произвольных бесконечных множеств.

Теорема 13. *(**Принцип Больцано – Вейерштрасса.**) Пусть множество X бесконечно и ограничено. Тогда оно имеет хотя бы одну предельную точку.*

Эта теорема является простым следствием теоремы Больцано – Вейерштрасса для последовательностей, так как если множество бесконечно, то оно или счётно или содержит счётное подмножество. Занумеровав элементы этого счётного множества, получим ограниченную последовательность, множество значений которой счётно (а не конечно!), поэтому согласно теореме Больцано – Вейерштрасса эта последовательность, (а значит, и всё множество X) имеет предельную точку. Однако мы приведём доказательство, опирающееся на принцип Бореля – Лебега.

Доказательство. Если множество X ограничено, то оно содержится в некотором отрезке $[a,b]$, $a < b$. Предположим, что у этого множества нет ни одной предельной точки. Тогда для всякой точки отрезка $[a,b]$ существует окрестность, содержащая либо конечное множество элементов из X, либо вообще не содержащая элементов X. Так как рассматриваются окрестности всех точек отрезка $[a,b]$, то эти окрестности образуют покрытие $[a,b]$ интервалами.

По принципу Бореля – Лебега мы можем выбрать из этого покрытия конечное множество интервалов, также покрывающее отрезок $[a,b]$. В каждом из этих интервалов либо конечное множество элементов из X, либо их там нет, поэтому и на всём отрезке $[a, b]$ множество элементов из X конечно. Противоречие. $\square$

Предложение 12. *Пусть X – бесконечное несчётное множество. Тогда у него есть предельная точка.*

Доказательство. Вещественная ось $\mathbb{R}$ может быть представлена в виде объединения счётного множества отрезков вида $[n-1, n], n \in$. Хотя бы в одном таком отрезке бесконечно много элементов множества X, так как иначе X было бы не более, чем счётным. Таким образом, получаем бесконечное подмножество множества X, лежащее в отрезке, то есть ограниченное. Тогда по принципу Больцано – Вейерштрасса у этого подмножества есть предельная точка, которая является и предельной точкой всего множества X. $\square$

Открытые и замкнутые множества

Определение 29. *Пусть X – непустое множество. Точка a множества X называется* ***внутренней точкой*** *X, если существует такая её окрестность $U(a)$, что $U(a)$ содержится во множестве X.*

Точка b называется ***граничной точкой множества*** *X, если в любой её окрестности $U(b)$ содержатся как точки, принадлежащие множеству X, так и точки, не принадлежащие этому множеству.*

Точка c множества X называется ***изолированной точкой*** *X, если найдётся такая её окрестности $U(c)$, что в ней нет других точек из X, кроме c.*

Пример 13. *Пусть $X = [0, 1] \cup (2, 3) \cup \{4, 5\}$. Все точки интервалов $(0, 1)$ и $(2, 3)$ являются внутренними точками множества X, а точки $0, 1, 2, 3, 4, 5$ – граничными точками X. При этом точки 4 и 5 – это изолированные точки множества X, а точки отрезков $[0, 1]$ и $[2, 3]$ – предельные.*

Определение 30. *Множество X в $\mathbb{R}$ называется* ***открытым****, если оно состоит только из внутренних точек.*

Множество Y в $\mathbb{R}$ называется ***замкнутым****, если дополнение к нему до $\mathbb{R}$ открыто.*

Можно также сказать, что множество открыто, если оно вместе с любой своей точкой содержит и некоторую окрестность этой точки. Примерами открытых множеств являются интервал, открытый луч.

Примерами замкнутых множеств могут служить точка, любое множество, состоящее из конечного числа точек, отрезок. Пустое множество и множество всех действительных чисел являются одновременно и открытыми, и замкнутыми, причём других таких множеств на вещественной прямой нет.

Ниже мы перечислим факты, дающие представление о структуре открытых и замкнутых множеств. Некоторые из этих фактов мы докажем на семинарах, некоторые будут даны в качестве домашних задач, а некоторые – в качестве дополнительных вопросов к коллоквиуму.

Сначала в качестве примера докажем один из таких фактов.

Предложение 13. *Множество Y является замкнутым тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

Доказательство. Необходимость. Пусть множество Y замкнуто. Тогда по определению дополнение к нему $X = \mathbb{R} \setminus Y$ открыто, поэтому вместе со всякой точкой $a \in X$ во множестве X лежит и некоторая окрестность $U(a)$ точки X. Тогда $U(a)$ не принадлежит ни одна точка множества Y, то есть ни одна точка множества X не является предельной для множества Y. Поэтому все предельные точки множества Y лежат в Y.
Достаточность. Пусть множество Y содержит все свои предельные точки. Тогда всякая точка a множества $X = \mathbb{R} \setminus Y$ имеет окрестность, в которой нет точек множества Y, то есть a входит во множество X вместе с некоторой окрестностью $U(a)$. Таким образом, множество X открыто, то есть для Y выполнено определение замкнутого множества. □

Упражнения. 1) Доказать, что объединение всех элементов любого набора открытых множеств и пересечение любого конечного числа открытых множеств является открытым множеством.

2) С помощью законов де Моргана вывести отсюда, что пересечение любого набора замкнутых множеств и объединение любого конечного набора замкнутых множеств является замкнутым множеством.

3) Доказать, что любое открытое непустое открытое множество можно представить в виде не более чем счётного объединения попарно не пересекающихся интервалов.

4) Доказать, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои граничные точки.

5) Числовая прямая не может быть представлена в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств и такой же факт верен для замкнутых множеств.

6) Доказать, что единственными множествами на числовой прямой, которые являются одновременно открытыми и замкнутыми, будут вся числовая прямая и пустое множество.

Множество частичных пределов последовательности не может быть произвольным. Например, интервал не может выступать в качестве множества всех частичных пределов какой-либо последовательности. Докажем соответствующее предложение.

Предложение 14. *Пусть A – множество всех частичных пределов последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Тогда A – замкнутое множество.*

Доказательство. Докажем, что множество A содержит все свои предельные точки. Это значит, что мы должны проверить, что любая предельная точка b множества A является частичным пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Но так как в любой окрестности точки b содержится бесконечно много элементов множества A, а каждая точка из A – это частичный предел последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, то в любой окрестности точки b содержится бесконечно много элементов этой последовательности. Таким образом, b – это частичный предел последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$. □

Компакты

В дальнейшем мы увидим, что непрерывные функции, определённые на отрезках, обладают рядом полезных свойств. Однако есть более общий класс множеств, на каждом из которых для непрерывной функции выполнены все такие свойства. Такие множества называют компактами.

Определение 31. *Компактом называют множество, из любого покрытия которого открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.*

Такое определение компакта удобно тем, что его можно использовать, если рассматривать более общие множества, а не вещественную прямую, то есть компакт таким же образом определяется на достаточно широком классе множеств, даже необязательно числовых. Однако это определение проверять трудно, поэтому чаще, когда речь идёт о числовой прямой, проверяют свойства, выполнение которых равносильно определению компакта. Об этих свойствах речь идёт в следующей теореме.

Теорема 14. ***(Критерий компактности.)*** *То, что множество K является компактом на прямой, равносильно любому из двух условий:*
(i) *множество K ограничено и замкнуто;*
(ii) *всякая последовательность элементов из K содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу из K.*

Доказательство этой теоремы мы здесь не приводим, однако оно нетрудно, поэтому оставляется в качестве обязательного упражнения.

Примеры, приведённые выше, показывают, что интервал не является компактом. Полезно проверить, что любой отрезок – это компакт, как и любое конечное объединение отрезков. Бесконечное объединение отрезков может и не быть компактом (приведите примеры). Более сложный пример компакта – это знаменитое *канторовское множество, состоящее из всех чисел отрезка* $[0, 1]$, *в троичной записи которых отсутствует единица.* Так как согласно теореме компакт – это ограниченное и замкнутое множество, то проверка компактности канторова множества становится несложной задачей. Подробнее о канторовских множествах мы поговорим на семинарах.

Лекция 8

Определение предела функции

Дадим несколько определений предела функции.

Определение 32. ***(Определение предела по Коши).*** *Пусть функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{R}$ и пусть a – предельная точка множества E. Число A называется пределом функции f в точке a по множеству E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого такого $x \in E$, что $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Запись с помощью кванторов:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \, \forall x \in E \wedge \, 0 < |x - a| < \delta \, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Отметим, что функция f может быть даже не определена в точке a.

Запись $x \in E \wedge \, 0 < |x - a| < \delta$ означает, что $x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta (a)$, где $\overset{\circ}{U}_\delta (a)$ – это проколотая δ-окрестность точки a. При этом неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ означает, что число $f(x)$ принадлежит ε-окрестности точки A; обозначим эту окрестность $V_\varepsilon(A)$. Таким образом, определение 1 можно переписать в таком виде: число A называется пределом функции f в точке a по множеству E, если для любой ε-окрестности $V_\varepsilon(A)$ точки A существует такая проколотая δ-окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta (a)$ точки a, что для любого $x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta (a)$ выполнено $f(x) \in V_\varepsilon(A)$, то есть выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Запись с помощью кванторов:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \, V_\varepsilon(A) \, \exists \, \overset{\circ}{U}_\delta (a) : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta (a) \, f(x) \in \, V_\varepsilon(A).$$

Итак, для любой ε-окрестности точки A найдётся проколотая δ-окрестность точки a, образ пересечения которой со множеством E при функции f содержится в ε-окрестности точки A.

Позже мы вернёмся к определению предела функции в терминах окрестностей, чтобы сформулировать и доказать теорему о пределе композиции функций.

Дадим ещё определение предела функции при стремлении x к $+\infty$. Для этого отметим, что о таком пределе может идти речь, если при любом $\delta > 0$ во множестве E, на котором определена функция f, содержится бесконечно много таких точек x, что $x > \delta$. Иными словами, множество E не является ограниченным сверху.

Определение 33. *Пусть функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{R}$. Число A называется пределом функции f при $x \to +\infty$ по множеству E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого такого $x \in E$, что $x > \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Запись с помощью кванторов:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \, \forall x \in E \wedge \, x > \delta \, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Принято считать окрестностью $+\infty$ любой луч $(\delta, +\infty)$. Таким образом, A – это предел функции f при $x \to +\infty$, если для любой $V_\varepsilon(A)$ найдётся такая окрестность бесконечности $(\delta, +\infty)$, что её пересечение с множеством E (которое предполагается непустым при любом δ) при функции f содержится в окрестности $V_\varepsilon(A)$.

Полезно сформулировать определение предела при $x \to -\infty$ и $x \to \infty$, а также определить, что значит $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ (здесь a также может выступать бесконечностью).

Теперь сформулируем ещё одно определение предела, которые во многих случаях оказывается более удобным, чем определение по Коши.

Определение 34. ***(Определение предела по Гейне).*** *Пусть функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{R}$ и пусть a – предельная точка множества E. Число A называется пределом функции f в точке a по множеству E, если для любой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, такой, что $a_n \in E, a_n \neq a \; \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \to a$ при $n \to \infty$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = A$. Запись с помощью кванторов:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall\{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \; a_n \in E \setminus \{a\} \; \forall n \in \mathbb{N} \wedge \lim_{n\to\infty} a_n = a \;\; \lim_{n\to\infty} f(a_n) = A.$$

Обратим внимание, что точка a может даже не принадлежать области определения функции. Нас интересует не случай $x = a$, а что происходит с f при приближении x к a.

Приведём примеры применения определений пределов функции по Коши и Гейне.

Пример 14. ***1)*** *Докажем, что $\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$. Воспользуемся определением предела функции по Коши. Множество E, на котором определена функция, – это всё $\mathbb{R}$, любая точка является предельной для этого множества. Необходимо доказать, что при любом $\varepsilon > 0$ найдётся такая проколотая окрестность точки a, что при всех x из этой окрестности выполняется неравенство $|x^2 - a^2| < \varepsilon$. Итак, для всякого $\varepsilon > 0$ необходимо указать такое $\delta > 0$, что при любом $x : 0 < |x - a| < \delta$ требуемое неравенство выполнено. Ограничение на x равносильно тому, что $a - \delta < x < a + \delta, x \neq a$. Используя неравенство треугольника, имеем:*

$$|x^2 - a^2| = |x - a| \cdot |x - a + 2a| < \delta(2|a| + \delta).$$

Если $\delta(2|a| + \delta) < \varepsilon$, то заведомо $|x^2 - a^2| < \varepsilon$. Однако получающееся квадратичное неравенство всегда имеет положительные решения:

$$\delta(\delta + 2|a|) < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \delta^2 + 2|a|\delta - \varepsilon < 0 \;\Leftrightarrow\; -|a| - \sqrt{a^2+\varepsilon} < \delta < -|a| + \sqrt{a^2+\varepsilon},$$

поэтому для всякого заданного $\varepsilon > 0$ можно взять $\delta = (-|a| + \sqrt{a^2+\varepsilon})/2$. Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$.

2) *Пусть $D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$ Докажем, что у функции D нет предела ни в одной точке. Для этого воспользуемся определением предела по Гейне. Снова $E = \mathbb{R}$, и любая точка множества E является его предельной точкой. Возьмём произвольную точку $a \in \mathbb{R}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \in \mathbb{Q} \setminus \{a\} \; \forall n \in \mathbb{N}$, то есть мы рассматриваем последовательность* ***рациональных*** *чисел, стремящуюся к a (см.решения семинарских задач, где в числе прочего доказывалось, что такая последовательность существует). Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} D(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$. Пусть теперь $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $b_n \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \setminus \{a\} \forall n \in \mathbb{N}$, то есть мы рассматриваем последовательность* ***иррациональных*** *чисел, стремящуюся к a. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} D(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$. Если бы предел в точке a был, то он бы являлся единственным для любых последовательностей, что следует из определения предела по Гейне. Так как мы получили два различных результата для двух разных последовательностей, сходящихся к a, то предела нет. Точка a была выбрана произвольно, поэтому для любой точки действительной оси рассуждения будут такие же. Итак, доказано, что функция D не имеет предела ни в одной точке.*

Функция D из примера выше называется **функцией Дирихле.** Это очень полезная функция, встречающаяся во многих разделах анализа. В дальнейшем мы ещё не раз используем её при построении различных контрпримеров.

Возникает важный вопрос: а что было бы, если бы в пункте 2 примера 1 мы бы использовали определение предела по Коши? Мог ли ответ измениться, или факт, который мы доказали, остался бы верным? Как показывает следующая теорема, факт остался бы верным, так как определения предела по Коши и по Гейне равносильны, то есть из существования предела по Коши вытекает существование предела по Гейне и наоборот.

Теорема 15. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *в смысле Коши* $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *в смысле Гейне.*

Доказательство. **Коши $\Rightarrow$ Гейне.** Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ в смысле Коши. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in E \setminus \{a\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \to a$ при $n \to \infty$. По определению предела по Коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)\ |f(x) - A| < \varepsilon$. Так как $a_n \to a$ при $n \to \infty$, то найдётся такое натуральное число N, что при всех $n > N$ $a_n \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, поэтому $|f(a_n) - A| < \varepsilon$. Итак, мы показали, что, какую ни взять последовательность $\{a\}_{n=1}^{\infty}$ с нужными свойствами, всегда $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = A$, что и означает наличие того же предела A по Гейне.

Гейне $\Rightarrow$ Коши. Пусть $\forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : a_n \in E \setminus \{a\} \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ имеем $f(a_n) \to A$ при $n \to \infty$. Будем рассуждать от противного: пусть A не является пределом функции f по Коши, то есть $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a) : |f(x) - A| \geq \varepsilon$. Пусть $\delta_n = 1/n$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $b_n \in E \cap \overset{\circ}{U}_{1/n}(a)$, что $|f(b_n) - A| \geq \varepsilon$. Таким образом, мы можем построить такую последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $b_n \in E \setminus \{a\} \forall n \in \mathbb{N}$ и при этом $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. Так как она удовлетворяет всем требованиям из определения предела по Гейне, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = A$. Тогда, переходя в неравенстве $|f(b_n) - A| \geq \varepsilon$ к пределу при $n \to \infty$, получим $0 = |A - A| \geq \varepsilon$ – противоречие. Таким образом, из определения предела по Гейне следует определение предела по Коши. □

Свойства предела функции

Теперь мы можем, пользуясь двумя равносильными определениями предела, вывести единственность предела, арифметические свойства предела функции, предельный переход в неравенствах, лемму об отделимости, ограниченность функции, имеющей предел, и лемму о зажатом пределе.

Теорема 16. *Пусть функции f, g и h определены на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}$, a – предельная точка множества E. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, а $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Тогда:*

1) *A – единственный предел функции f* ***(единственность предела)****;*

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;

3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;

4) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/g(x)) = A/B$ *($g(x) \neq 0\ \forall x \in E$, $B \neq 0$)* ***(арифметика предела)****;*

5) *если $f(x) \leq g(x)$ в пересечении некоторой проколотой окрестности точки a и множества E, то $A \leq B$* ***(предельный переход в неравенствах)****;*

6) *если существует такая $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, что $f(x) \leq h(x) \leq g(x)\ \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ и $A = B$, то $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$* ***(лемма о зажатом пределе)****;*

7) *существуют такие $\delta > 0$ и $C \geq 0$, что $|f(x)| \leq C\ \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$* ***(ограниченность функции, имеющей предел)****;*

8) *если $A \neq 0$, то существует такая $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, что $|f(x)| \geq \frac{|A|}{2}\ \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$* ***(лемма об отделимости)****.*

Доказательство. Так как у функций f и g есть пределы, то для них выполняется определение предела по Гейне. Применяя его для последовательностей из определения предела по Гейне, получаем выполнение свойств **1) – 6)** для этих последовательностей, так свойства уже доказаны для последовательностей в предыдущих лекциях. С другой стороны, так как эти свойства выполнены для любых последовательностей из определения предела по Гейне, то они выполняются и для функций f и g, что следует из определения предела по Гейне.

7) Из определения по Коши следует, что при $\varepsilon = 1$ найдётся такое $\delta > 0$, что

$$\forall x \in E\cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)\ |f(x) - A| < 1.$$

Из последнего неравенства следует, что при всех таких x выполнено неравенство

$$|f(x)| < 1 + |A|.$$

Тогда в качестве C можно взять $1 + |A|$.

8) Пусть $A > 0$. Из определения по Коши следует, что при $\varepsilon = \frac{A}{2}$ найдётся такое $\delta > 0$, что

$$\forall x \in E\cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)\ f(x) \in \left(\frac{A}{2}, \frac{3A}{2}\right).$$

Если $A < 0$, то при $\varepsilon = -\frac{A}{2}$ точно также получаем окрестность $E\cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, для которой

$$\forall x \in E\cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)\ f(x) \in \left(\frac{3A}{2}, \frac{A}{2}\right).$$

Объединяя оба случая, при всех $x \in E\cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ имеем неравенство $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$. □

Все свойства пределов функций, сформулированные выше, имеют свои аналоги для пределов последовательностей, чем мы существенно пользовались, однако для функций, рассматриваемых нами на этой лекции, возможна ещё операция композиции, то есть операция, при которой под знаком функции g, определённой на множестве D, стоит не аргумент, а некоторая функция f, определённая на множестве E и принимающая значения во множестве D. В следующей теореме речь пойдёт о пределе композиции функций.

Теорема 17. ***(Теорема о пределе композиции).*** *Пусть функция g определена на множестве D, b – предельная точка множества D и*

$$\lim_{y\to b} g(y) = A\ (y \in D).$$

Пусть функция $f:\ E \to D$, a – предельная точка множества E и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b\ (x \in E)$. Пусть, наконец, для некоторого $\delta > 0$ при всех x из множества $E\cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ выполнено $f(x) \neq b$. Тогда сложная функция $g \circ f$ определена на множестве E и $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = A$.

Доказательство. То, что сложная функция $g \circ f$ определена на множестве E, следует из того, что функция f принимает значение в D, на котором определена функция g.

Так как $\lim\limits_{y\to b} g(y) = A$, то $\forall\ V_\varepsilon(A)\ \exists\ \overset{\circ}{U}_\tau(b) : \forall y \in D\cap \overset{\circ}{U}_\tau(b)\ g(y) \in\ V_\varepsilon(A)$. По условию найдётся множество $E\cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ $(\delta > 0)$, образ которого $f\left(E\cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)\right)$ при функции f содержится в $D\cap \overset{\circ}{U}_\tau(b)$. Таким образом,

$$\forall\ V_\varepsilon(A)\ \exists\ \overset{\circ}{U}_\delta(a) : \forall x \in E\cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)\ g(f(x)) \in\ V_\varepsilon(A),$$

то есть по определению $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = A$. □

Пример 15. *1) Рассмотрим случай предела функции на бесконечности. Пусть функция g определена на $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{y\to\infty} g(y) = A$. Положим $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Тогда при любом $c > 0$ во множестве вида $\{y \in \mathbb{R} \mid |y| > c\}$ содержится целиком образ множества*

$$\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid |x| < \frac{1}{c}\}$$

при функции f, а $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$. Поэтому по теореме о композиции $\lim\limits_{x\to 0} g(\frac{1}{x}) = A$.

2) Пусть $f(x) \equiv 0$, $g(y) = \begin{cases} 1, y = 0 \\ 0, y \neq 0. \end{cases}$ Тогда $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 0$, но $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x)) = 1$. Условия теоремы о пределе композиции не выполнены, так как образ любой окрестности

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x| < \delta\}$$

при функции f – это точка 0, то есть этот образ не содержится ни в одной проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\tau(0)$.

Предел функции по базе

Отметим, что во всех ситуациях для нас важны два свойства пересечений с множеством E проколотых δ-окрестностей предельных точек множества E:
1) все такие пересечения непусты: $E\cap \overset{\circ}{U}_\delta(a) \neq \varnothing$;
2) в пересечении двух любых таких множеств содержится множество такого же типа:

$$\forall\, \delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0\ \exists \delta_3 > 0 :\ E\cap \overset{\circ}{U}_{\delta_3}(a) \subset \Big(E\cap \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(a)\Big) \cap \Big(E\cap \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(a)\Big).$$

Эти свойства позволяют построить более общую теорию предела, которая используется не только для числовых функций, – *предел по базе множеств*. Полезно проверить выполнение этих свойств для множеств, которые мы рассматривали при определениях пределов последовательности и функции (подробнее см. 1 том книги В. А. Зорича). Здесь мы не будем останавливаться на понятии предела по базе, а лишь приведём некоторые определения.

Определение 35. *Пусть E – область определения функции f, а $B = \{b\}$ – некоторый набор подмножеств в E. Этот набор подмножеств называется базой множеств для множества E, если набор B состоит из бесконечного числа непустых подмножеств E и для всяких b_1 и b_2, принадлежащих B, найдётся непустое $b_3 \in B$, такое, что $b_3 \subset b_1 \cap b_2$. Элементы набора называются окончаниями базы B.*

Легко видеть, что наши проколотые окрестности из определения предела как раз составляют базу множеств.

Определение 36. ***(Определение предела по базе)****. Пусть функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{R}$. Число A называется пределом функции f по базе B, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое окончание $b \in B$, что при всех $x \in b$ выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Запись с помощью кванторов:*

$$\lim_{B} f(x) = A \ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0 \exists\ b \in B : \forall x \in b\ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

В качестве **упражнения**, используя понятие предела по базе, сформулируйте и докажите основные утверждения, которые мы выше формулировали для предела функции.

Такой способ построения предела удобен своей универсальностью, так как нам не нужно для каждого случая брать свою систему пересечений окрестностей с областью определения, а можно, введя определение базы, записать универсальное определение предела, сформулировать и доказать все утверждения, а они, в свою очередь, будут верны в каждом конкретном случае, некоторые из которых, мы разбирали выше. Например, для последовательности мы брали множество натуральных чисел, для функции рассматривали предел в точке или при стремлении аргумента к бесконечности, а при общем определении предела по базе все соответствующие факты становятся частными случаями общей теории.

Первый замечательный предел

Предложение 15. ***(Первый замечательный предел).*** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Приведём два обоснования этого факта. Так как строго определить синус мы пока не можем, ибо не все, необходимые для этого определения понятия, на данный момент изучены, то наши обоснования нельзя считать доказательствами в полной мере. Для того, чтобы приведённые ниже рассуждения стали доказательствами, нам нужно знать строгие определения синуса, длины дуги и площади. С понятием длины мы знакомы лучше, чем с понятием площади, поэтому первое обоснование для нас более подходящее, чем второе. Однако когда все указанные выше понятия будут строго определены, то можно будет убедиться, что рассуждения ниже являются доказательствами.

Первое обоснование опирается на понятие длины.

Доказательство. Наблюдение 1. При всех вещественных x справедливо неравенство

$$|\sin x|\le |x|,$$

а также $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ *и* $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

Пусть $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. Длина дуги окружности равна точной верхней грани длин вписанных в неё ломанных, а длина ломанной равна сумме длин её звеньев. Из неравенства треугольника вытекает, что длина ломанной, вписанной в дугу, не меньше длины хорды, стягивающей эту дугу. Таким образом (см. рисунок 1), длина хорды AB не больше длины

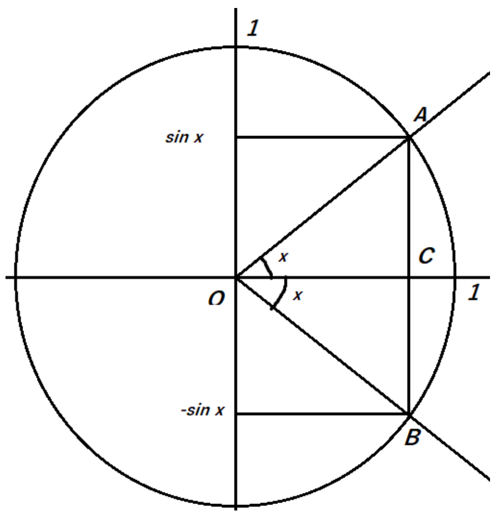

Рис. 1: Длина хорды не больше длины дуги

стягиваемой ей дуги AB (имеется в виду меньшая дуга). При этом длина дуги AB равна $2x$, а длина хорды (здесь мы используем "школьное" определение синуса) AB равна $2\sin x$, откуда получаем неравенство $\sin x \leq x$.

Отсюда получаем неравенство $|\sin x| \leq |x|$, справедливое при всех $x \in \mathbb{R}$, причём равенство выполнено только при $x = 0$. Действительно, при $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ выполнено неравенство $\sin x \leq x$, но при этом при $x \geq \frac{\pi}{2}$ неравенство очевидно справедливо, так как синус не превосходит 1. Если же $x \leq 0$, то имеем

$$\sin(-x) \leq -x \Leftrightarrow \sin x \geq x.$$

Объединяя неравенства при $x \geq 0$ и при $x \leq 0$, и получаем, что $|\sin x| \leq |x|$. Кроме того,

$$|\sin x| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq \sin x \leq |x|,$$

так что по лемме о зажатом пределе имеем $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

Найдём $\lim\limits_{x\to 0} \cos x$. Для этого отметим, что

$$|1 - \cos x| = \left|2\sin^2 \frac{x}{2}\right| \leq \left|2\sin \frac{x}{2}\right| \leq 2 \cdot \frac{|x|}{2} = |x|,$$

откуда для произвольного $\varepsilon > 0$, полагая $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, получим, что при всех $0 < |x| < \delta$ выполнено неравенство $|\cos x - 1| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

Наблюдение 2. При $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ справедливо неравенство $x \cos x \leq \sin x$. Теперь рассмотрим любую дугу, меньшую π, а через её концы L и M проведём касательные OL и OM (см. рисунок 2). Из неравенства треугольника следует, что сумма длин отрезком касательных

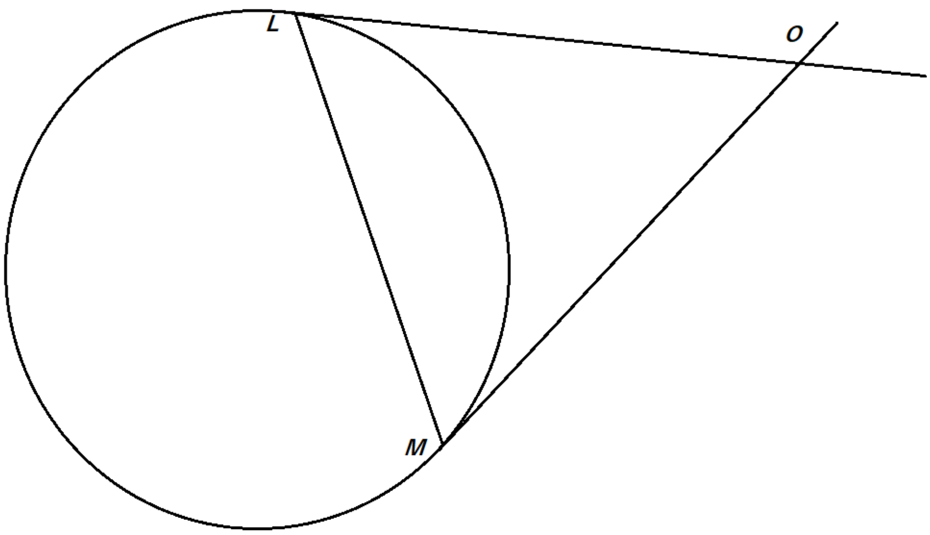

Рис. 2: $|OM| + |OL| \geq |ML|$.

не меньше, чем длина хорды, стягивающей дугу. Используя это наблюдение в качестве базы индукции, докажем, что длина любой ломанной, вписанной в эту дугу, не больше, чем длина отрезков касательных, проведённых через концы дуги. Действительно, пусть для ломанной с не более, чем n звеньями, этот факт верен. Если в ломанной $n+1$ звено, проведём касательную через вершину A_n ломанной (см. рисунок 3).

По предположению индукции

$$|A_1A_2| + ... + |A_{n-1}A_n| \leq |A_1D| + |A_nD| \text{ и } |A_nA_{n+1}| + |A_{n+1}A_{n+2}| \leq |A_nC| + |A_{n+2}C|.$$

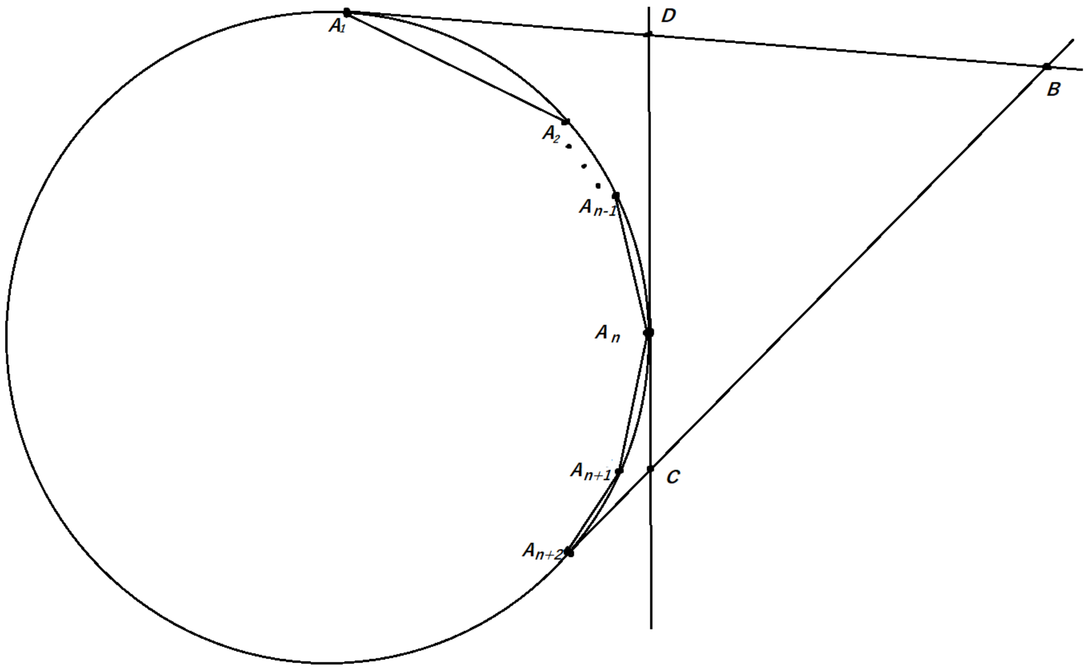

Рис. 3: Шаг индукции

Тогда тогда по неравенству треугольника

$$|A_1A_2| + ... + |A_{n+1}A_{n+2}| \leq$$
$$\leq |A_1D| + |DC| + |A_{n+2}C| \leq |A_1D| + |DB| + |BC| + |A_{n+2}C| = |A_1B| + |BA_{n+2}|.$$

Таким образом, доказано, что сумма длин отрезков касательных – верхняя грань длин ломанных, вписанных в дугу, а тогда длина самой дуги также не превосходит сумму длин отрезков касательных, так как длина дуги – точная верхняя грань длин вписанных в эту дугу ломанных, то есть наименьшая из верхних граней.

Из этого наблюдения получаем (см. рисунок 4), что сумма длин отрезков AB и BC не

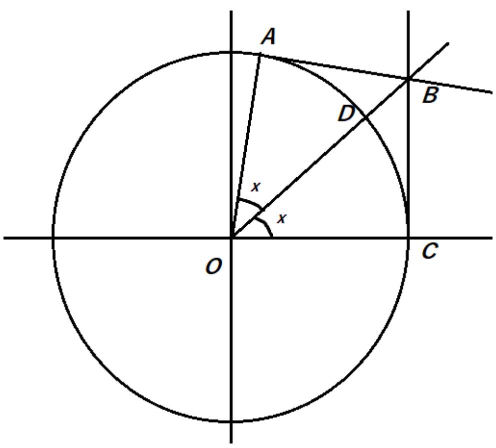

Рис. 4: Тангенс больше аргумента

меньше, чем $2x$. Для длин этих отрезков по определению тангенса имеем

$$|AB| = |BC| = \operatorname{tg} x,$$

откуда $x \leq \operatorname{tg} x$, что равносильно неравенству $x \cos x \leq \sin x$.

Завершение доказательства. Итак, мы получили двойное неравенство для синуса при $0 < x < \pi/2$:

$$x\cos x \le \sin x \le x \Leftrightarrow \cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1.$$

Заметим, что в силу чётности входящих в последнее неравенство функций, оно сохраняется и для $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Теперь снова применим лемму о зажатом пределе к неравенству $\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$ при $x \to 0$, откуда и получим, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. □

Второй способ обоснования опирается на понятие площади, но снова всё сводится к лемме о зажатом пределе.

Доказательство. Пусть $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Тогда справедливы неравенства (см. рис. 5):

$$S_{\triangle OMB} < S_{\text{круг. сектор } OMB} < S_{\triangle OCB} \Leftrightarrow (1\cdot \sin x)/2 < \frac{\pi}{2\pi}x < (1\cdot \operatorname{tg} x)/2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1.$$

Снова получено неравенство $\sin x < x$, справедливое при всех $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

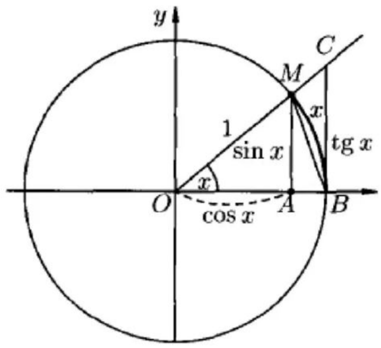

Рис. 5: Первый замечательный предел

Далее,

$$1 - \cos x > 1 - \frac{\sin x}{x} > 0 \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2} > 1 - \frac{\sin x}{x} > 0 \Rightarrow$$
$$2\cdot\frac{x}{2} > 2\sin\frac{x}{2} > 2\sin^2\frac{x}{2} > 1 - \frac{\sin x}{x} > 0 \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x|,$$

причём последнее неравенство справедливо при всех $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$.

Если взять произвольное $\varepsilon > 0$, то, полагая $\delta = \min\left\{\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right\}$, получим, что при всех $0 < |x| < \delta$ выполнено неравенство $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$, а это по определению означает, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

□

Приведём полезные примеры применения доказанного предложения при вычислении пределов.

Пример 16. *1) Найдём* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}$*. Пусть* $g(y)=\frac{\sin y}{y}$*, а* $f(x)=5x$*. Тогда функция* g *определена на* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$*, а* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*. По доказанному предложению* $\lim\limits_{x\to 0}g(y)=1$*. Кроме того, очевидно, что* $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$*, и при этом ни в какой проколотой окрестности нуля* f *не принимает значение* 0*. Рассмотрим произвольную проколотую окрестность нуля (считаем* $\tau>0$*)*

$$\overset{\circ}{U}_\tau(0)=\{y\in\mathbb{R}\mid -\tau<y<\tau,\ y\neq 0\}.$$

Тогда в ней содержится проколотая окрестность нуля

$$\overset{\circ}{U}_{\tau/5}(0)=\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{\tau}{5}<x<\frac{\tau}{5},\ x\neq 0\}.$$

Таким образом, все условия теоремы о пределе композиции выполнены, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=1.$$

2) Пользуясь арифметикой пределов и первым замечательным пределом, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

3) Найдем предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}$*. Для этого сделаем замену* $t=\operatorname{arctg}x$*, откуда по определению арктангенса* $\operatorname{tg}t=x$*. Так как* $x\to 0$*, то* $\operatorname{tg}t=\frac{\sin t}{\cos t}\to 0$*, потому мы можем считать, что* $t\to 0$ *(более строгое обоснование будет получено, когда мы докажем, что арктангенс непрерывен в нуле). Таким образом, используя теорему о пределе композиции и предыдущий пункт, имеем*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg}t}=1.$$

4) Аналогично пункту 3 получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1.$$

5) Используя формулы тригонометрии, арифметику пределов и первый замечательный предел, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Отметим, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$*, так как если положить* $y=\frac{x}{2}$*, то будут выполнены все условия теоремы о пределе композиции.*

Определение 37. *Говорят, что функции* f *и* g ***эквивалентны*** *при* $x\to a$*, где* a *– предельная точка множества* E*, если найдётся такая проколотая окрестность* $\overset{\circ}{U}(a)$ *точки* a *и такая функция* h*, определённая на множестве* $\overset{\circ}{U}(a)\cap E$*, что* $\lim\limits_{x\to a}h(x)=1$ *и при всех* $x\in\overset{\circ}{U}(a)\cap E$ *выполнено равенство* $f(x)=h(x)g(x)$*. Если функция* g *не равна нулю на множестве* $\overset{\circ}{U}(a)\cap E$*, то это определение равносильно тому, что* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$*. Обозначение:* $f\sim g,\ x\to a$*.*

В качестве **упражнения** дайте определение эквивалентных функций при $x \to \infty$ и общее определение функций, эквивалентных по базе множеств.

Таким образом, в предложении и примере выше было доказано, что при $x \to 0$

$$\sin x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2},\ \operatorname{tg} x \sim x,\ \arcsin x \sim x,\ \operatorname{arctg} x \sim x.$$

Несложным упражнением будет доказать, что заданное отношение является отношением эквивалентности, откуда следует, что

$$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim x$$

при $x \to 0$.

Выражаясь нестрогим языком, мы можем сказать что эквивалентные функции "приближенно равны"в достаточно малой проколотой окрестности точки a, а это иногда позволяет находить пределы. Приведём пример использования эквивалентностей, но более подробно к этой теме вернёмся при изучении вопроса сравнения бесконечно малых.

Пример 17. *1) Опираясь на рассуждения пункта 1 примера 3, получим*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{arctg} 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{7x}{5x} = \frac{7}{5}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\sin 7x \sim 7x,\ \operatorname{tg} 5x \sim 5x,\ x \to 0.$

В этом случае эквивалентности прекрасно помогли сократить вычисления, но иногда такой подход приводит к неверному ответу. Продемонстрируем это в следующем пункте.

2) Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$. *Если снова использовать эквивалентности, то получим* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x^3} = 0$. *Разумеется, этот ответ неверный, а причину легко объяснить: величины* $\sin x$ *и* $\operatorname{tg} x$ *эквивалентны при* $x \to 0$, *но вовсе не равны. При этом отметим, что* ***если имеются произведения и частные бесконечно малых величин, а сумм и разностей нет, то применение эквивалентностей приводит к верным ответам.*** *Например, сомножитель можно заменить на эквивалентный ему: если ищем* $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) \cdot f_2(x)$ *и* $f_1 \sim g$ *при* $x \to a$, *то*

$$\lim_{x\to a} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim_{x\to a} g(x) \cdot f_2(x).$$

Искомый же предел вычисляется так:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\cos x - 1)}{x^3 \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Лекция 9

Второй замечательный предел

Предложение 16. ***(Второй замечательный предел).***
1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; ***2)*** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Доказательство. **1)** Сначала рассмотрим случай $x \to +\infty$. Заметим, что

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} \to e \text{ и } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \to e \text{ при } n\to+\infty,$$

то есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N_1 \in \mathbb{N} : \forall\, n > N_1\ \left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n - e\right| < \varepsilon,$$

а также (при этом же ε)

$$\exists\, N_2 \in \mathbb{N} : \forall\, n > N_2\ \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right| < \varepsilon,$$

поэтому при $N = \max\{N_1,\ N_2\}$ и при $x > 1+N$ мы имеем $[x] > N$, а тогда

$$e-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} < e+\varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, x > 1+N\ \left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon,$$

то есть по определению $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Теперь рассмотрим случай $x \to -\infty$. Положим $y = -x$, тогда $y \to +\infty$, и мы можем применить теорему о пределе композиции:

$$e = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Объединяя случаи $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$, получаем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

2) В этом случае сделаем замену $\frac{1}{x} = p$. Тогда $p \to \infty$ и мы снова можем применить теорему о пределе композиции (см. примеры предыдущей лекции лекции):

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{p\to\infty}\left(1+\frac{1}{p}\right)^p = e.$$

$\square$

Приведём примеры применения второго замечательного предела. Отметим при этом, что при вычислениях пределов ниже мы, кроме теоремы о переделе композиции, будем использовать непрерывность некоторых функций. Позже эта непрерывность будет доказана независимо.

Пример 18. *1)* $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$. *Здесь переход к пределу по знаком логарифма возможен именно в силу непрерывности логарифма в точке* e.

2) Докажем, что $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$. *Положим* $e^x-1=y$, *откуда получим* $x=\ln(1+y)$, *поэтому* $y\to0$ *и в силу теоремы о пределе композиции получаем*

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1.$$

3) Воспользуемся теоремой о пределе композиции для вычисления предела $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$. *Имеем:*

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}.$$

Положим $\ln(1+x)=t$, *откуда получим* $x=e^t-1$ *и при* $x\to0$ *также и* $t\to0$. *Таким образом,*

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{e^{\alpha t}-1}{e^t-1}=\lim_{t\to0}\frac{\alpha(e^{\alpha t}-1)/\alpha t}{(e^t-1)/t}=\frac{\alpha}{1}=\alpha.$$

O-символика и сравнение бесконечно малых

Определение 38. *Функция* $f:E\to\mathbb{R}$ *называется бесконечно малой при* $x\to a$, *где* a *является предельной точкой множества* E, *если* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$. *Если* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ *(или* $-\infty$, *или* $+\infty$*), то функция* $f(x)$ *называется бесконечно большой при* $x\to a$. *Везде* $x\in E$.

Определение 39. *Пусть функции* f *и* g *определены на множестве* E, a *– предельная точка множества* E. *Говорят, что функция* f *является бесконечно малой по сравнению с функцией* g *при* $x\to a$, *если* $f(x)=h(x)g(x)$ *и* h *– бесконечно малая функция при* $x\to a$. *Если при этом сами функции* f *и* g *являются бесконечно малыми при* $x\to a$, *то говорят, что функция* f *–* ***бесконечно малая более высокого порядка*** *по сравнению с* g *при* $x\to a$. *Тот факт, что* f *является бесконечно малой по сравнению с* g *при* $x\to a$, *записывают в виде* $f=o(g),\ x\to a$ *(читается “*f *равно о-малое от* g *при* x, *стремящемся к* a*”). Запись* $h=o(1),\ x\to a$ *означает, что* h *является бесконечно малой функцией при* $x\to a$. *Таким образом, запись* $f=o(g),\ x\to a$ *равносильна* $f=o(1)g,\ x\to a$.

Предложение 17. *Запись* $f=o(g),\ x\to a$ *равносильна также тому, что* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ *(при этом считаем, что* $g(x)\neq0$ *в некоторой проколотой окрестности точки* a*).*

Доказательство. Действительно, если $f=o(g),\ x\to a$, то по определению

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{h(x)g(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}h(x)=0,$$

так как $h(x)\to0$ при $x\to a$. Обратно, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, то функция $h:=\frac{f}{g}$ по определению является бесконечно малой при $x\to a$, а тогда справедливо равенство $f(x)=h(x)g(x)$, то есть $f=o(g),\ g\to a$. □

Пример 19. *1) При* $m>n>0$ $x^m=o(x^n),\ x\to0$, *так как* $x^m=x^{m-n}\cdot x^n$ *и* $x^{m-n}\to0$.

2) При $m>n>0$ $x^n=o(x^m),\ x\to+\infty$, *так как* $x^n=x^{n-m}\cdot x^m$ *и* $x^{n-m}\to0$.

3) Как мы знаем, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$. *Это равносильно тому, что* $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x}=0$, *что, в силу предложения 1, равносильно равенству* $\sin x-x=o(x),\ x\to0$, *а последнее равенство равносильно*

$$\sin x=x+o(x),\ x\to0. \tag{1}$$

Равенство (1) является **асимптотическим**, то есть оно справедливо *при достаточно малых значениях* x, или, другими словами, при стремлении x к нулю. Нас интересует на равенство в конкретной точке, а равенство в достаточно малой окрестности предельной точки. Этим равенством выражается тот факт, что при стремлении аргумента к нулю синус и аргумент отличаются на величину, стремящуюся к нулю быстрее, чем сам аргумент и чем сам синус. Говоря неформально, можно сказать, что в очень маленькой окрестности нуля синусоида и прямая $y = x$ "практически сливаются".

Используя пределы, найденные выше и в предыдущей лекции, можем выписать следующие асимптотические равенства, которые выводятся, как и равенство (1):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),\ x \to 0, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} x = x + o(x),\ x \to 0, \tag{3}$$

$$\arcsin x = x + o(x),\ x \to 0, \tag{4}$$

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x),\ x \to 0, \tag{5}$$

$$e^x = 1 + x + o(x),\ x \to 0, \tag{6}$$

$$\ln(1+x) = x + o(x),\ x \to 0, \tag{7}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x),\ x \to 0,\ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Замечание 1. Обратим внимание, что если $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$ и $h(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности a, то равенства (1) – (8) верны, если x, заменить на $h(x)$. Это можно доказать, сделав замену $t = h(x)$ и применив теорему о пределе композиции.

Воспользуемся выписанными равенствами для вычисления пределов.

Пример 20.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(-\frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^2 + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(-\frac{1}{2} + o(1)) + o(1)(-\frac{1}{2} + o(1))x^2}{x^2(1 + o(1))} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(-\frac{1}{2} + o(1)) + o(1)x^2}{x^2(1 + o(1))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + o(1) + o(1)}{1 + o(1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(-\frac{1}{2} + o(1))}{\lim\limits_{x\to 0}(1 + o(1))} = -\frac{1}{2}.$$

При применении формулы (1) к синусу из знаменателя и формулы (4) к логарифму мы использовали замечание 1, полагая, что $h(x) = x^2$ *для синуса и* $h(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ *для логарифма. Кроме того, мы пользовались определением 5, а в особенности той его частью, в которой объясняется значение символа* $o(1)$.

Про свойства "о-малых"мы ещё поговорим на семинарах.

Определение 40. *Пусть функции* f *и* g *определены на множестве* E, a *– предельная точка множества* E. *Если при* $x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ *выполнено равенство* $f(x) = h(x)g(x)$, *где* h *определена и ограничена на* $E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, *то пишут* $f = O(g),\ x \to a$ *("f есть О-большое от g при x стремится к a").*

Аналогично определению 5, запись $f = O(1),\ x \to a$ означает, что f является ограниченной на пересечении некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ и области определения E. Запись $f = O(g),\ x \to a$ в этих обозначениях будет означать, что $f = O(1)g,\ x \to a$.

Пример 21. *1)* $\frac{1}{x} + \sin x = O(1),\ x \to +\infty$, *так как функция* $\frac{1}{x} + \sin x$ *ограничена на любом луче* $(b, +\infty),\ b > 0$.

2) Верно также асимптотическое равенство $\frac{1}{x} + \sin x = O(x),\ x \to +\infty$ *потому что* $\frac{1}{x} + \sin x = (\frac{1}{x^2} + \frac{\sin x}{x})x$ *при* $x > 0$, *а* $\frac{1}{x^2} + \frac{\sin x}{x}$ *является бесконечно малой, а значит, ограниченной при* $x \to +\infty$.

3) В силу того, что $\frac{1}{x^2} + \frac{\sin x}{x}$ *бесконечно малая, мы имеем равенство*

$$\frac{1}{x} + \sin x = o(x),\ x \to +\infty.$$

4) Функции $\frac{1}{x} + \sin x$ *и* $\frac{1}{x^2} + \frac{\sin x}{x}$ *не являются ограниченными в любой окрестности нуля, поэтому при* $x \to 0$ *равенства пунктов 1) – 3) неверны.*

5) В силу того, что $\frac{1}{x} + \sin x = (1 + x\sin x)\frac{1}{x}$ *и* $(1 + x\sin x)$ *ограничена в любой окрестности нуля, имеем асимптотическое равенство* $\frac{1}{x} + \sin x = O(\frac{1}{x}),\ x \to 0$.

Напомним, что если функции f и g определены на множестве E, a – предельная точка множества E, то говорят, что функции f и g **эквивалентны** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ (при этом считаем, что $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a).

Упражнение. Докажите, что $f \sim g,\ x \to a \Leftrightarrow f = g + o(g),\ x \to a$ (см. пример 1, пункт 3)).

Как уже обсуждалось в предыдущих лекциях, эквивалентности можно использовать при вычислении некоторых пределов, но такой результат иногда приводит к ошибкам. Укажем некоторые примеры.

Пример 22. *1) Выше мы вычисляли предел* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin(x^2)}$. *Если "в лоб"использовать замечание 1 и эквивалентности, то получим:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

В этом случае эквивалентности прекрасно помогли сократить вычисления, так как, как уже обсуждалось в предыдущих лекциях, бесконечно малые, которые мы заменили на эквивалентные, являлись множителями или делителями ***всего*** *выражения под знаком предела. Однако иногда такой подход приводит к неверному ответу. Продемонстрируем это в следующем пункте.*

2) Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$. *Здесь в числителе стоит* ***разность бесконечно малых, которые эквивалентны****. Если снова использовать эквивалентности, то получим* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x^3} = 0$. *Разумеется, этот ответ неверный, а причину легко объяснить: разность* $\sin x - x$ стремится *к 0, но вовсе не* равна *нулю, как получается при применении эквивалентностей. Однако ещё раз отметим, что* ***если имеются произведения и частные бесконечно малых величин, а сумм и разностей нет, то применение эквивалентностей приводит к верным ответам.***

Как же всё-таки вычислить предел из пункта 2 примера 4? Безусловно, можно пробовать использовать асимптотическое равенство (1), и мы увидим сейчас, что хотя оно позволяет прийти к выводу, что искомый предел может быть равен ненулевому числу, для вычисления значения предела этого недостаточно.

Действительно, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+o(x)-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{o(x)}{x^3}$. Однако при $x\to0$ функция $o(x)$ может быть равна, например, x^2 (и тогда предел бесконечный) или x^3 (тогда предел равен 1), или x^4 (тогда ответ 0). Другими словами, запись $o(x)$ не даёт достаточное количество информации для вычисления предела.

При изучении дифференциального исчисления мы выведем асимптотические равенства, которые содержат больше информации и позволяют не только считать более сложные пределы, но и производить приближенные вычисления с большой точностью. Эти равенства без доказательства будут приведены уже сейчас.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n),\ x\to0; \tag{9}$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o(x^{2n+2}),\ x\to0; \tag{10}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1}),\ x\to0; \tag{11}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+o(x^n),\ x\to0; \tag{12}$$

$$\begin{gathered}(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+...+\\+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot...\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)=\\=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot...\cdot(\alpha-k+1)}{k!}x^k+o(x^n),\ x\to0\ (\alpha\in\mathbb{R}).\end{gathered} \tag{13}$$

Как мы видим, в этих формулах берётся больше слагаемых, чем в равенствах (1) – (8), что даёт в определённом смысле более хорошее приближение суммы к функции. Характер приближения сумм на примере синуса приведён на рис. 1.

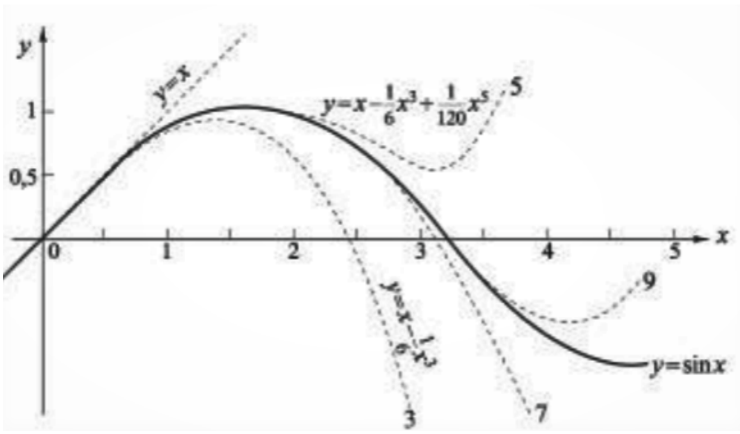

Рис. 6: Иллюстрация поведения сумм для $\sin x$ при $n=0,1,2,3,4$.

Как мы видим, разница между многочленом и синусом в окрестности нуля тем меньше, чем больше степень приближающего многочлена.

Вернёмся теперь к нахождению предела. Нам достаточно использовать формулу (10) при $n=2:\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3(-\frac{1}{6}+o(1))}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}(-\frac{1}{6}+o(1))=-\frac{1}{6}$.

На семинарах мы встретим ещё примеры на применение формул (9) – (13).

Пример 23. *На прошлой лекции мы выяснили, что* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^3}=-\frac{1}{2}$. *Тогда, используя равенство 10 при* $n=2$, *получим при* $x\to 0:$

$$\operatorname{tg} x-\sin x=\frac{x^3}{2}+o(x^3) \;\Leftrightarrow\; \operatorname{tg} x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

Полученной для тангенса формулой также можно пользоваться при вычислении пределов.

Лекция 10

Теорема Вейерштрасса

Пусть функция f определена на множестве E и a – предельная точка множества E. Пусть $E_a^+ = \{x \in E : x > a\}$, т. е. $E_a^+ = E \cap (a, +\infty)$. Аналогично, $E_a^- = E \cap (-\infty, a)$. Тогда точка a является предельной для хотя бы одного из множеств E_a^- и E_a^+. Дадим определение **односторонних пределов** функции f в точке a.

Определение 41. *Пусть a – предельная точка множества E_a^+. Число A называется **пределом справа** функции f в точке a, если*

$$\lim_{E_a^+ \ni x \to a} f(x) = A,$$

*то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $x \in E_a^+ \cap \overset{\circ}{U}_\delta\ (a)$ $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$ или $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$. Аналогично определяется **предел слева** функции f в точке a, обозначаемый $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$, только множество E_a^+ в определении заменяется на E_a^-. Пределы справа и слева называются также **односторонними пределами.***

Иными словами, предел справа – это предел, при котором x стремится к a, *всегда оставаясь больше a*, а предел слева – тот, при котором x стремится к a, *всегда оставаясь меньше a*. При этом, разумеется, x всегда принадлежит множеству E. Если a – предельная точка только для множества E_a^- или E_a^+ (ещё раз отметим, что тогда она всё равно является предельной для E), то мы можем говорить только о существовании соответствующего одностороннего предела.

Упражнения. 1) Запишите определения односторонних пределов с помощью кванторов.

2) Дайте определения односторонних пределов, пользуясь терминологией последовательностей, то есть по Гейне.

Дадим теперь определение монотонной на множестве E функции.

Определение 42. *Если для любых таких $x_1, x_2 \in E$, что $x_1 < x_2$, выполнено неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция f называется **неубывающей** на множестве E. Если выполнено неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется **возрастающей** на множестве E. Если выполнены противоположные неравенства для значений f при том же условии $x_1 < x_2$, то функция f называется соответственно **невозрастающей** и **убывающей** на множестве E. Функция любого из четырёх указанных видов называется **монотонной** на множестве E функцией.*

Упражнение. Всегда ли сумма монотонных функций монотонна? (*Ответ: нет*).

Определение 43. *Функция f называется ограниченной на множестве E, если она определена на этом множестве и существует такая константа $C > 0$, что $|f(x)| \leq C$ при всех $x \in E$.*

Сформулируем теорему, которая обобщает теорему Вейерштрасса для последовательностей.

Теорема 18. ***(Теорема Вейерштрасса).*** ***1)*** *Пусть функция f определена на множестве E и a – предельная точка множества E_a^-. Пусть f не убывает и ограничена сверху на множестве E_a^-. Тогда существует предел слева функции f в точке a и имеет место равенство $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \sup\limits_{x\in E_a^-} f(x)$.*

2) *Пусть функция f не убывает и ограничена на множестве E. Пусть a – предельная точка множества E_a^+. Тогда существует предел справа функции f в точке a и имеет место равенство $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \inf\limits_{x\in E_a^+} f(x)$.*

Доказательство. **1)** Так как функция f ограничена сверху, то у неё существует точная верхняя грань. По определению точной верхней грани,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists x_0 \in E_a^- : M - \varepsilon < f(x_0) \le M,$$

где $M := \sup\limits_{x\in E_a^-} f(x)$. Так как функция f неубывающая, то $\forall x \in E_a^- : x > x_0$ (что означает, что $x_0 < x < a$ и $x \in E$) выполнены неравенства $M - \varepsilon < f(x_0) \le f(x) \le M$, т. е. при любом $\varepsilon > 0$ мы нашли такое $\delta := a - x_0 > 0$, что при всех $x \in E_a^- \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ выполнено неравенство $|f(x) - M| < \varepsilon$, т. е. по определению

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \sup_{x\in E_a^-} f(x) = M.$$

Пункт **2)** докажите в качестве упражнения. □

Упражнение. Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для невозрастающих функций.

Критерий Коши существования предела функции

Сейчас мы докажем обобщение критерия Коши для последовательности на случай функций *вещественного* аргумента. Этот критерий является обобщением аналогичного результата для последовательностей, так как последовательность – функция *натурального* аргумента, а натуральные числа – подмножество вещественных.

Полезно ещё раз обратить внимание, как работают определения пределов по Коши и Гейне.

Теорема 19. ***(Критерий Коши.)*** *Пусть функция f определена на множестве E, a является предельной точкой множества E. Функция f имеет предел в точке a* ***тогда и только тогда****, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любых чисел $x, y \in E$, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - a| < \delta$, $0 < |y - a| < \delta$ выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. С помощью кванторов:*

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall\, x, y \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap E\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Тогда по определению предела по Коши $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in E\cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)\ |f(x) - A| < \varepsilon/2$. Если $y \in E\cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, то $|f(x)-f(y)| = |f(x)-A+A-f(y)| \le |f(x)-A|+|f(y)-A| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ такова, что $a_n \in E \setminus \{a\} \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда при любом $\delta > 0$, найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что $a_n \in E\cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ при всех

$n > N$, из чего по условию следует, что последовательность $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, а тогда существует предел этой последовательности. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = A$.

Рассмотрим теперь другую последовательность, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, и пусть для неё также выполнены условия, которым удовлетворяет последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Если мы докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = A$, то существование предела функции f в точке a будет следовать из определения предела по Гейне. Отметим, что последовательность $\{a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, ...\}$ также сходится к числу a, поэтому при любом $\delta > 0$, найдётся такое $N_1 \in \mathbb{N}$, что и a_n, и b_n принадлежат множеству $E\cap \overset{\circ}{U}_\delta\ (a)$ при всех $n > N_1$, поэтому последовательность $\{f(a_1), f(b_1), f(a_2), f(b_2), ..., f(a_n), f(b_n), ...\}$ фундаментальна, а тогда у неё есть предел. Тогда у этой последовательности ровно один частичный предел, который и совпадает с её пределом. Выше мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = A$, то есть подпоследовательность последовательности $\{f(a_1), f(b_1), f(a_2), f(b_2), ..., f(a_n), f(b_n), ...\}$ сходится к A. Тогда и вся эта последовательность сходится к A, поэтому её подпоследовательность $\{f(b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к тому же пределу, что и завершает доказательство. □

Непрерывные функции

В этом разделе мы с помощью предела определим понятие функции, непрерывной в точке. Обратим внимание, что функция, непрерывная в некоторой точке a, должна быть *определена* в этой точке. Сейчас мы увидим, как это отражается на определении непрерывной функции.

Определение 44. *Пусть функция f определена на множестве E, точка $a \in E$. Функция f называется непрерывной в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при всех таких $x \in E$, что $|x - a| < \delta$ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Итак, во-первых, точка a не обязательно является предельной для множества E, а во-вторых, не требуется, чтобы число x принадлежало проколотой окрестности точки E. Если добавить эти два условия, то мы получим определение предела функции f в точке a, причём этот предел будет равен значению функции f в точке a. Однако любая проколотая ε-окрестность точки содержится в её ε-окрестности, поэтому без условия про проколотую окрестность всё равно получится, что определение непрерывности функции f в *предельной точке a* равносильно тому, что предел функции f в этой точке равен $f(a)$.

Пусть теперь точка $a \in E$ не предельная (а тогда она изолированная). В этом случае при достаточно маленьком $\delta > 0$ условия $x \in E$ и $|x - a| < \delta$ означают, что $x = a$, так как других точек, принадлежащих E, в δ-окрестности точки a нет. Тогда при всех $x \in U_\delta(a)\cap E$ $f(x) - f(a) = 0$, поэтому неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ выполнено при любом $\varepsilon > 0$, то есть в изолированной точке определение непрерывности выполнено автоматически. Тем самым доказано, что *в изолированной точке любая функция, определённая в ней, непрерывна.*

Таким образом, определение непрерывной в точке a функции можно записать и так: *функция f называется непрерывной в точке a, если точка a является изолированной точкой множества E, либо если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ $(x \in E)$* (**определение непрерывности 2**). Так как стремление x к a происходит только по точкам множества E, то определение непрерывности допускает ещё одну формулировку: *функция f называется непрерывной в точке a, если точка a является изолированной точкой множества E, либо если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(\lim\limits_{x\to a} x)$ $(x \in E)$* (**определение непрерывности 3**).

Учитывая определение бесконечно малой функции, мы можем записать определение непрерывности так: *функция f называется непрерывной в точке a, если точка a является* *изолированной точкой множества E, либо если*

$$f(x) = f(a) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a, \alpha(a) = 0$ ($x \in E$) (**определение непрерывности 4**).

В терминах окрестностей определение непрерывности примет вид: *функция f называется непрерывной в точке a, если точка a является изолированной точкой множества E, либо если для любого $\varepsilon > 0$ справедливо следующее условие: ε-окрестность точки $f(a)$ содержит образ некоторой окрестности точки a при функции f ($x \in E$)* (**определение непрерывности 5**).

Все эти определения непрерывности равносильны, что следует из доказанных ранее теорем о пределах.

Если попытаться определить непрерывную функции с помощью определения предела по Гейне, то можно отказаться от того, что рассматриваются только последовательности, не принимающие значение a. Итак, используя определение предела по Гейне и его равносильность определению по Коши, получим ещё одно определение непрерывной функции: *функция f называется непрерывной в точке a, если для любой такой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, что $a_n \in E, a_n \to a, n \to +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$* (**определение непрерывности 6**). Отметим, что указывать отдельно на случай изолированной точки здесь не нужно, так как если последовательность со значениями во множестве E стремится к изолированной точке a, то существует такое натуральное N, что $a_n = a$ при всех $n > N$.

В дальнейшем слова "функция f непрерывна в точке a"будут записываться в таком виде: $f \in C(a)$.

Обсудим ещё непрерывность функции в терминах односторонней непрерывности.

Определение 45. *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной справа в точке $a \in E$, предельной для E_a^+, если $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$, и непрерывной слева, если $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a)$ (здесь точка должна являться предельной для E_a^-.)*

Предложение 18. *$f \in C(a) \Leftrightarrow f$ непрерывна в a справа и слева, причём*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = f(a).$$

Доказательство. Необходимость. Если $f \in C(a)$, то по первому определению непрерывности для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при всех таких $x \in E$, что $|x - a| < \delta$ $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$. Тогда при всех таких $x \in E$, что $-\delta < x-a < 0$ выполнено $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$, то есть функция f непрерывна в точке a слева. Непрерывность справа доказывается точно так же.

Достаточность. Непрерывность справа и слева означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta_1 > 0$, что при всех таких $x \in E$, что $0 < x - a < \delta_1$ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, а также найдётся такое $\delta_2 > 0$, что при всех таких $x \in E$, что $-\delta_2 < x - a < 0$ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Тогда для $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ при всех таких $x \in E$, что $|x - a| < \delta$ будет выполнено неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся своё δ, для которого выполнено определение непрерывности. □

Теперь обсудим свойства функций, непрерывных в точке.

Предложение 19. ***(Локальные свойства непрерывных функций)***. *Пусть функции f и g определены на множестве E, $a \in E$, $f \in C(a)$, $g \in C(a)$. Тогда выполнены следующие свойства:*
1) *$\alpha f + \beta g \in C(a)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (линейная комбинация непрерывных в точке функций является непрерывной в этой точке функцией);*
2) *$f \cdot g \in C(a)$ (произведение непрерывных в точке функций является функцией, непрерывной в этой точке);*
3) *если $g(x) \neq 0$ $\forall x \in E$, то $\frac{f}{g} \in C(a)$ (частное непрерывных в точке функций является функцией, непрерывной в этой точке, причём знаменатель не обращается в нуль);*
4) *$\exists M \geq 0, \delta > 0 : \forall x \in E \cap U_\delta(a)$ $|f(x)| \leq M$ (для непрерывной в точке функции найдётся окрестность этой точки, в которой функция ограничена);*
5) *если $f(a) \neq 0$, то существует такая окрестность $U_\delta(a)$ точки a, что*

$$|f(x)| > \frac{|f(a)|}{2} \ \forall x \in E \cap U_\delta(a),$$

причём для таких x $f(x) \cdot f(a) > 0$, то есть функция f совпадает по знаку с $f(a)$.

Доказательство. В случае изолированной точки a эти свойства следуют из того, что любая функция непрерывна в точке a. Если a является предельной точкой, то свойства следуют из определения непрерывной функции через предел и арифметики пределов. □

Свойства называются локальными, так они выполнены в окрестности точки. В дальнейшем мы обсудим свойства функций, непрерывных на таких, например, множествах, как отрезок.

Предложение 20. ***(Теорема о композиции непрерывных функций)***. *Пусть множества E, D и K содержатся в $\mathbb{R}$, $f : E \to D$, $g : D \to K$. Пусть $a \in E$, $f(a) \in D$, и $f \in C(a)$, $g \in C(f(a))$. Тогда функция $g \circ f : E \to K$ непрерывна в точке a (здесь $(g \circ f)(x) := g(f(x))$).*

Доказательство. Пусть $a_n \in E$ $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \to a$. Тогда $f(a_n) \in D$ и в силу непрерывности (см. определение непрерывности по Гейне) $f(a_n) \to f(a),\ n \to a$. Так как g непрерывна в точке $f(a)$, то опять же по определению непрерывности по Гейне имеем

$$\lim_{n\to\infty} g(f(a_n)) = g(f(a)).$$

□

Теорема о композиции непрерывных в точке функций позволяет доказывать непрерывность некоторых элементарных функций.

Пример 24. *На семинарах мы проверим,что $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, а $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$. Точно также доказывается, что $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x} = 1$. Тогда функции $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \sqrt{x}$ удовлетворяют всем условиям теоремы о композиции, поэтому функция $g \circ f \in C(1)$. Здесь*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) := \sqrt{\sin x}.$$

Точки разрыва

Определение 46. *Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ не является непрерывной в точке $a \in E$, то эта точка называется точкой разрыва функции f.*

Отметим очевидное следствие этого определения: точкой разрыва может являться только предельная точка множества E.

Если $a \in E$ – точка разрыва функции f, то возможны три случая. Подробно разберём каждый из них.

Во-первых, предел в точке $a \in E$ у функции f может существовать, но не быть равным $f(a)$. В этом случае достаточно определить функцию f в точке a её пределом в этой точке, чтобы функция стала непрерывной, поэтому такая точка называется **точкой устранимого разрыва.** Примером функции с точкой устранимого разрыва может служить $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 0$, где $a = 0$. Эта функция в точке $a = 0$ имеет значение 0, а предел при $x \to 0$ равен 1, поэтому достаточно положить $f(0) = 1$, чтобы функция f стала непрерывной в точке 0.

Часто встречаются функции, которые не определены в предельных точках своих областей определения, но имеют в этих точках предел (возможно, левый или правый предел). В этом случае можно в качестве значения такой функции в этой предельной точке брать значение предела, а тогда функция станет определенной и непрерывной в данной предельной точке (соответственно, непрерывной слева или справа). На рис. 1 см. точку устранимого разрыва.

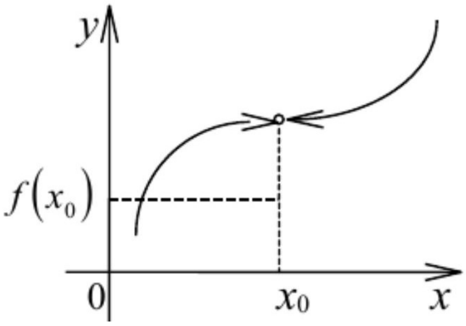

Рис. 7: Устранимый разрыв в точке $a = x_0$.

Во-вторых, в точке $a \in E$ у функции может не быть предела, но при этом существуют оба односторонних предела (см. предыдущую лекцию), которые не равны друг другу. В этом случае точка a называется **точкой разрыва первого рода**. Иногда такой разрыв называют скачком. Примером функции с такой точкой разрыва может служить кусочно заданная функция $f(x) = \begin{cases} -1, \text{ если } x < 0, \\ 1, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$ Точка $a = 0$ является точкой разрыва первого рода. См. также рис. 2.

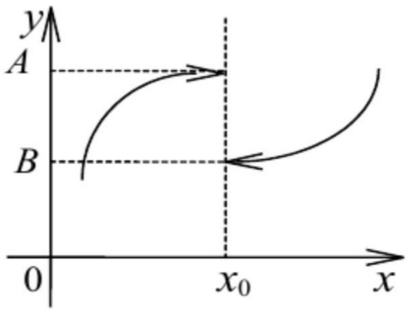

Рис. 8: Разрыв первого рода в точке $a = x_0$.Скачок величины $|BA|$.

В-третьих, хотя бы один из односторонних пределов в точке $f \in E$ может не существовать или быть равным $\pm\infty$ (то есть либо $+\infty$, либо $-\infty$, либо просто ∞.) Такая точка называется **точкой разрыва второго рода.** Точку разрыва этого типа имеет в нуле гипербола $f(x) = \frac{1}{x}$ (если доопределить её в нуле любым действительным числом), так как $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$.

Отметим, что в задачниках часто просят определить тип разрыва функции в точке, но при этом в условии эта функция не определена в этой точке. Например, если мы хотим найти точки разрыва и определить их тип у функции $y = 1/x$, то с точки зрения нашего определения функция непрерывна на всей своей области определения. Однако если в дальнейшем нам встретится задача с такой формулировкой, то мы должны изучить (если иное не оговорено специально) все предельные точки области определения и найти в них пределы справа и слева, а далее отнести каждую такую точку к соответствующему типу разрыва.

Решая задачи на семинарах, мы видели что у функции $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ нет предела справа в нуле, поэтому $x = 0$ будем считать разрывом второго рода этой функции. Функция Дирихле $D(x)$ (см. прошлые лекции) не имеет предела ни в одной точке, поэтому она является примером функции, **разрывной в каждой точке.** Все точки области определения функции Дирихле являются точками разрыва второго рода.

Функция Дирихле позволяет построить много интересных примеров. Скажем, если мы рассмотрим функцию $y = xD(x)$, то она будет непрерывна только в точке $x = 0$, а в других точках у неё будут разрывы второго рода.

Упражнение. 1) Приведите пример функции, определённой на всей оси и непрерывной в n точках.

2) Приведите пример функции, определённой на всей оси и непрерывной на счётном множестве.

Поведение функции в окрестности точки разрыва довольно разнообразно. См. рис. 3, на котором изображено несколько видов разрывов второго рода.

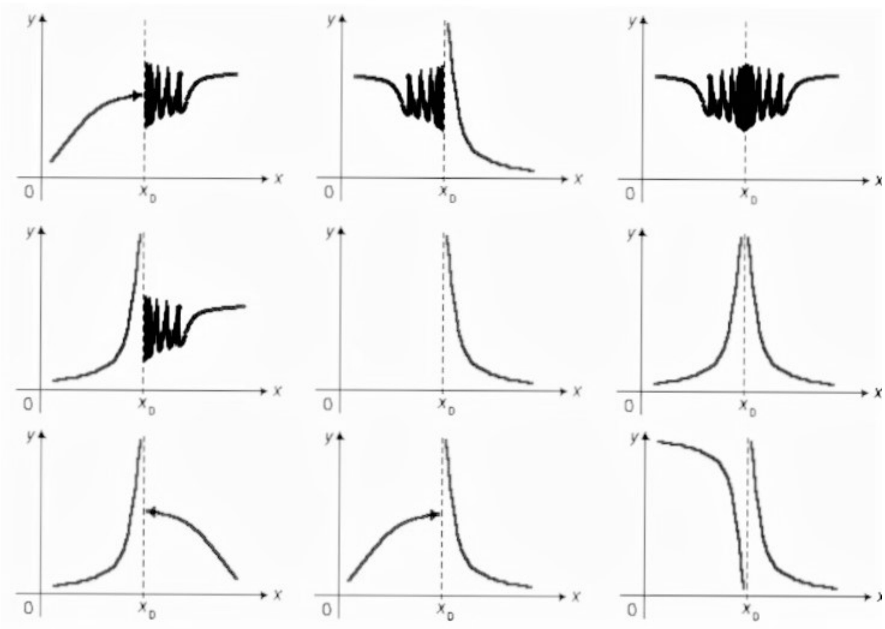

Рис. 9: Разные виды разрывов второго рода в точке $a = x_0$.

Сформулируем важное свойство монотонной функции.

Предложение 21. *Монотонная на интервале функция может иметь на этом интер-*

вале только разрывы первого рода.

Доказательство. Пусть функция f не убывает на интервале (a, b) (случай невозрастания сводится к случаю неубывания заменой функции f на $-f$.) Для любой точки $x_0 \in (a, b)$ число $f(x_0)$ является верхней гранью для множества значений f в точках $x \in (a, x_0)$ и нижней гранью для множества значений f в точках $x \in (x_0, b)$. Поэтому для любой точки $x_0 \in (a, b)$ имеем в силу теоремы Вейерштрасса:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x) \leq f(x_0) \leq \inf_{x > x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Таким образом, в любой точке интервала (a, b) существуют односторонние пределы, но они могут не совпадать, что возможно лишь при разрывах первого рода. □

Контрольный вопрос: обязательно ли в формулировке теоремы брать именно интервал?

Упражнение. Докажите, что множество точек разрыва монотонной на отрезке функции не более чем счётно.

Лекция 11

Свойства непрерывных на отрезке функций

Определение 47. *Функция f, определённая на множестве E, называется непрерывной на E, если она непрерывна в каждой точке E.*

Контрольный вопрос: каким должно быть множество E, чтобы любая функция, определённая на E, была на нём непрерывной?

Тот факт, что функция f непрерывна на множестве E, записывается так: $f \in C(E)$.

Область определения функции может строго содержать то множество, на котором функция непрерывна. Например, функция $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$ непрерывна на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (короче: $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$), а определена на всём множестве $\mathbb{R}$.

Свойства непрерывной функции зависят от того множества, на котором она непрерывна. На этой лекции мы в основном будем рассматривать функции, непрерывные на отрезке.

Теорема 20. *Пусть функция $f \in C([a,b])$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда $\exists c \in (a,b) : f(c) = 0$.*

Доказательство. По условию функция f принимает значения разных знаков в точках a и b. Пусть, например, $f(a) < 0$, тогда $f(b) > 0$. Разобъём отрезок $[a,b]$ пополам. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то всё доказано, а если нет, то пусть,например, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$. Обозначим $\frac{a+b}{2}$ через a_1, а b через b_1. Для отрезка $[a_1, b_1]$ проделаем ту же самую процедуру: возьмём точку $\frac{a_1+b_1}{2}$, найдём $f(\frac{a_1+b_1}{2})$; если это значение не равно нулю, то из отрезков $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ и $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ выберем тот, на концах которого функция f принимает значения разных знаков. Обозначим через a_2 левый конец этого отрезка, а через b_2 – правый. Разобъём этот отрезок пополам и т.д.. Если ни в какой из середин отрезков не получится нулевое значение функции, тот этот процесс будем продолжать до бесконечности и получим последовательность стягивающихся отрезков. Пересечение этих отрезков состоит, как мы знаем, из одной точки, которую обозначим через c. Последовательность левых концов построенных отрезков $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и последовательность правых концов $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ стремятся к c, поэтому, в силу непрерывности функции на отрезке $[a,b]$ $f(a_n) \to f(c), f(b_n) \to f(c)$ и при этом $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$ по построению. Используя предельный переход в неравенствах и арифметику предела, имеем: $f^2(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$, поэтому $f(c) = 0$, чем все и доказано. $\square$

Эта теорема имеет разнообразные применения. Само доказательство не только позволяет доказать существование корня, но и даёт способ его нахождения с любой заданной точностью. Такой метод нахождения корня называется *методом бисекции.*

Пример 25. *Докажем, что уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$ имеет три различных действительных корня. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 3x + 1$ и отметим, что она непрерывна в каждой точке прямой, а тогда непрерывна и на всей прямой, и на любом отрезке этой прямой. Теперь заметим, что $f(-2) < 0,\ f(0) > 0,\ f(1) < 0,\ f(2) > 0$ (эти числа мы просто подобрали). Так как f непрерывна, в частности, на отрезках $[-2,0],\ [0,1]$ и $[1,2]$, а на концах каждого из этих отрезков принимает значения разных знаков, то по предыдущей теореме найдутся такие числа $c_1 \in (-2,0),\ c_2 \in (0,1)$ и $c_3 \in (1,2)$, что $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = 0$. Таким образом, всё доказано. Теперь можно, например, найти корень c_1 с большей точностью, так как пока нам лишь известно, что он лежит на интервале $(0,1)$. Так как $f(1/2) < 0$, то $c_1 \in (0,1/2)$. Так как $f(1/4) > 0$, то $c_1 \in (1/4,1/2)$ и так далее.*

Напомним, что функция f,определённая на множестве E, называется ограниченной на этом множестве, если $\exists C \geq 0 : |f(x)| \leq C \ \forall x \in E$.

Теперь докажем две теоремы Вейерштрасса.

Теорема 21. *(**1-я теорема Вейерштрасса.**) Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Если функция f не ограничена на отрезке, то для каждого натурального n существует такая точка $x_n \in [a, b]$, что $|f(x_n)| > n$. Все элементы последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ принадлежат отрезку $[a, b]$, то есть последовательность ограничена, поэтому по теореме Больцано – Вейерштрасса она имеет хотя бы одну сходящуюся к некоторому числу c подпоследовательность $c_k = a_{n_k}$, причём $c \in [a, b]$ в силу предельного перехода в неравенствах. При этом $|f(c_k)| > n_k$, поэтому в точке c у функции f не существует конечного предела, что противоречит непрерывности этой функции. $\square$

Отметим, что можно было доказать эту теорему и с помощью принципа Бореля – Лебега, используя локальную ограниченность непрерывной функции. Действительно, для каждой точки отрезка $[a, b]$ существует окрестность, в которой функция f ограничена. Такие окрестности образуют покрытие отрезка $[a, b]$, а тогда по принципу Бореля – Лебега мы можем выбрать конечное подпокрытие, на каждом элементе которого функция f ограничена. Тогда мы можем из всех чисел, которыми ограничена функция, выбрать максимальное, а этим числом функция будет ограничена уже на всём отрезке.

Ниже мы приведём примеры, показывающие важность того, что функция непрерывна именно *на отрезке.*

Теорема 22. *(**2-я теорема Вейерштрасса.**) Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, что*

$$f(x_1) = m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x), \ \ f(x_2) = M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x).$$

Доказательство. Существование точных верхней и нижней граней функции f следует из того, что по первой теореме Вейерштрасса f ограничена на отрезке $[a, b]$, то есть множество её значений ограничено, а тогда существует точная верхняя и точная нижняя грани её множества значений.

Доказательство проведём для супремума. Предположим, что точка x_2 не найдётся. Тогда $M - f(x) > 0 \ \forall x \in [a, b]$. Рассмотрим функцию g, которая в точке $x \in [a, b]$ принимает значение $\frac{1}{M - f(x)}$. В силу локальных свойств непрерывных функций g непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$, а тогда она непрерывна на всём отрезке по определению, что даёт её ограниченность на всём отрезке по 1-й теореме Вейерштрасса. С другой стороны, по определению супремума

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in [a, b] : \ f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon.$$

При $\varepsilon = 1/n$ получим, что $\forall n \in \mathbb{N} \ g(x_{1/n}) > n$, то есть функция g не ограничена на отрезке. Таким образом, пришли к противоречию. $\square$

Упражнение. Провести доказательство для $\inf f(x)$.

В следующей теореме доказывается, что образом непрерывной на отрезке функции является отрезок.

Теорема 23. ***(Больцано – Коши о непрерывной функции.)*** *Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, $m = \inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$, $M = \sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$. Тогда для любого числа $C \in [m,M]$ существует такая точка $c \in [a,b]$, что $f(c) = C$.*

Доказательство. Если $C = m$ или $C = M$, то всё доказано в теореме 3. Будем использовать обозначения этой теоремы. Если $C \in (m,M)$, то функция $g := f - C$ непрерывна на отрезке $[x_1,x_2]$ (отрезок неориентированный) и $g(x_1) = m - C < 0$, а $g(x_2) = M - C > 0$, то есть для функции g на отрезке $[x_1,x_2]$ выполнены все условия теоремы 1. Тогда

$$\exists c \in [x_1,x_2] : g(c) = 0,$$

то есть $f(c) = C$. □

Теперь на примерах продемонстрируем, почему в теоремах Вейерштрасса требуется, чтобы функция была *непрерывна на отрезке.*

Пример 26. *1) Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,1)$. Тогда $\inf\limits_{0<x<1} f(x) = 1$, а $\sup\limits_{0<x<1} f(x) = +\infty$. Мы видим, что функция f непрерывна на интервале, но не является ограниченной и не достигает точной верхней и точной нижней грани. Причина этого – то, что функция определена на интервале, а не отрезке.*

2) Пусть $f(x) = \begin{cases} x, 0 < x \le 1, \\ \frac{1}{2}, x = 0. \end{cases}$ Тогда $\inf\limits_{0\le x\le 1} f(x) = 0$, а $\sup\limits_{0\le x\le 1} f(x) = 1 = f(1)$. Здесь нет точки, в которой значение функции равно точной нижней грани, так как функция не является непрерывной на отрезке, хотя и определена на отрезке. График этой функции изображён ниже.

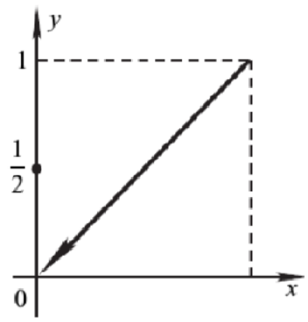

Рис. 10: Не достигается точная нижняя грань.

Напомним, что компактом на прямой называется множество, из любого покрытия которого открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие. Теоремы Вейерштрасса можно обобщить на функции, непрерывные на компактах. Интересующиеся могут это сделать в качестве **упражнения.**

Равномерная непрерывность

Начнём с примера.

Пример 27. *Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,1)$. На этом интервале f непрерывна. Используем определение непрерывности для точки $a = \frac{1}{10}$, взяв $\varepsilon = 0.1$. Нужно подобрать такое*

$\delta > 0$, чтобы при всех таких x из интервала $(0,1)$, что $|x - \frac{1}{10}| < \delta$, мы бы получили $|\frac{1}{x} - 10| < 0.1$. Отсюда имеем $\frac{10}{101} < x < \frac{10}{99}$, а тогда в качестве δ нужно взять

$$\min\left\{\left|\frac{1}{10} - \frac{10}{101}\right|, \left|\frac{1}{10} - \frac{10}{99}\right|\right\} = \frac{1}{1010}.$$

Если теперь взять при том же $\varepsilon = 0.1$ точку $a = \frac{1}{1000}$, то для выполнения неравенства $|\frac{1}{x} - 1000| < 0.1$ нужно будет брать уже $\delta = \frac{1}{10001000}$, то есть выбор δ зависит от той точки $a \in (0,1)$, которую мы рассматриваем. Иллюстрация ниже показывает, что при одном и том же $\varepsilon > 0$ для разных точек нужно выбирать разные $\delta > 0$: правый вертикальный прямоугольник имеет большую ширину, а левый очень узкий, тогда как оба горизонтальных прямоугольника одинаковой высоты.

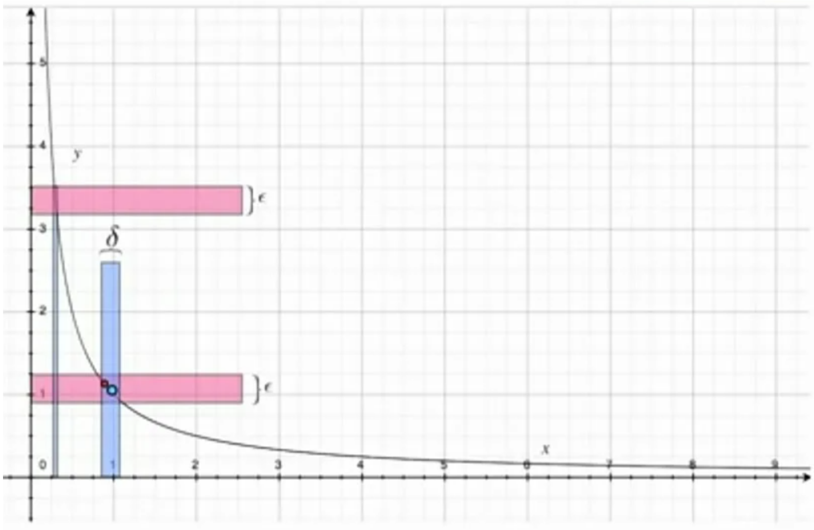

Рис. 11: См. зависимость ширины вертикальных прямоугольников от разных точек.

Нас будут интересовать те функции, для которых δ не зависит от точки непрерывности, а зависит только от ε. В таком случае говорят, что функция f равномерно непрерывна. Геометрически это означает, что прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, длины которых равны δ (горизонтальные стороны) и ε (вертикальные стороны), можно так перемещать вдоль графика функции, что график будет пересекать только вертикальные стороны или вершины, лежащие на одной диагонали, но не пересечёт горизонтальные стороны (на рисунке 3 ниже это свойство не выполняется).

Дадим точное определение.

Определение 48. *Функция f, определенная на множестве E, называется равномерно непрерывной на этом множестве, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех таких $x_1, x_2 \in E$, что $|x_1 - x_2| < \delta$, выполнено неравенство*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Приведём ещё примеры функций со свойством равномерной непрерывности и без него.

Пример 28. *1) Функция $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, т. к. $\forall \varepsilon > 0$ имеем: $|\sin x - \sin y| = |2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}| \leq 2|\sin \frac{x-y}{2}| \leq |x - y| < \varepsilon$, если $|x - y| < \delta$, где $\delta = \varepsilon$. Таким образом, здесь выбор δ не зависит от точек на вещественной оси, а зависит только от ε.*

2) Функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}, x > 0$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}_+$, так как точки вида $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ и $y = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ $(n \in \mathbb{N})$ могут быть сколь угодно близки друг к другу при достаточно больших n, но $|\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{y}| = 2$ при всех натуральных n, то есть при $0 < \varepsilon < 2$ необходимо будет подбирать δ в зависимости от конкретной точки. Рисунок 3 ниже демонстрирует это. Красная часть графика пересекает верхнюю и нижнюю стороны одного из прямоугольников. Чтобы этого не было, нужно уменьшить длину δ горизонтальной стороны при приближении к нулю. Это значит, что равномерной непрерывности нет.

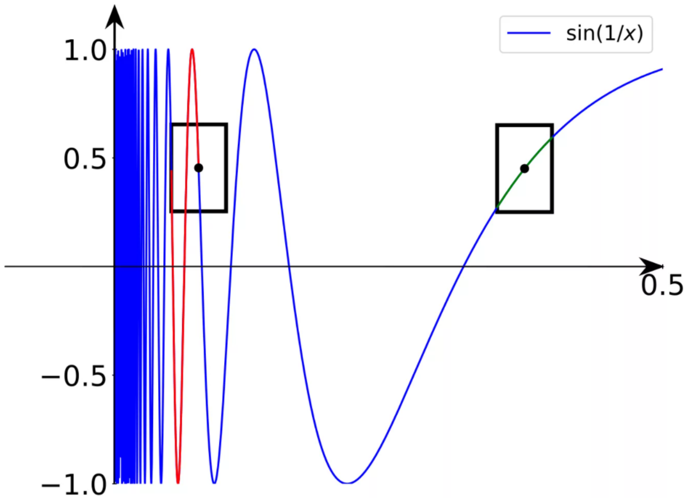

Рис. 12: Чем ближе к нулю, тем быстрее растёт функция на промежутках монотонности.

Докажем теперь теорему о замечательном свойстве функций, непрерывных на отрезке.

Теорема 24. *(**Гейне – Кантора о равномерной непрерывности**). Функция f, непрерывная на отрезке $[a, b]$, равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Доказательство. **(1-й способ, через принцип Бореля – Лебега).** По условию функция f непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$, поэтому в силу критерия Коши для функций при всяком $\varepsilon > 0$ для каждой точки $x \in [a, b]$ найдётся такая окрестность $U_\delta(x)$, что при всех $x, y \in U_\delta(x)$ выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Отметим, что δ зависит от точки x, то есть для разных точек найдутся, вообще говоря, разные δ. Все окрестности вида $U_{\delta/2}(x)$покрывают отрезок $[a, b]$, так как каждая точка отрезка принадлежит какой-нибудь из этих окрестностей.

По принципу Бореля – Лебега из системы всех окрестностей можно выбрать конечную систему, также покрывающую отрезок $[a, b]$. Обозначим эти окрестности

$$U_{\delta_i/2}(x_i),\ \text{где } i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Положим $\delta = \min\{\frac{\delta_1}{2}, \frac{\delta_2}{2}, \ldots, \frac{\delta_n}{2}\}$ и докажем, что для любых таких точек $x', x'' \in [a, b]$, что $|x' - x''| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Действительно, так как окрестности $\{U_{\delta_i/2}(x_i)\}_{i=1}^n$ покрывают отрезок $[a, b]$, то найдётся такая окрестность

$$U_{\delta_j/2(x_j)},\quad \text{что } x' \in U_{\delta_j/2}.$$

Тогда

$$|x'' - x_j| \leq |x' - x_j| + |x'' - x'| < \delta_j/2 + \delta \leq \delta_j,$$

то есть $x'' \in U_{\delta_j}(x_j)$, поэтому, вспоминая, как были построены все окрестности вида $U_\delta(x)$, мы имеем $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Таким образом, равномерная непрерывность доказана. $\square$

Доказательство. **(2-й способ, через теорему Больцано – Вейерштрасса).** Предположим, что функция f не является равномерно непрерывной на отрезке $[a, b]$. Тогда существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что для любого натурального n найдутся такие точки $x_n \in [a, b]$ и $y_n \in [a, b]$, что $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, но

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_1. \tag{1}$$

Все элементы последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и принадлежат отрезку $[a, b]$, поэтому в силу теоремы Больцано – Вейерштрасса из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Обозначим предел этой подпоследовательности x_0. Тогда для любого $\delta > 0$ найдётся такой номер $K \in \mathbb{N}$, что при всех $k > K$ справедливо неравенство $|x_{n_k} - x_0| < \delta$. Выберем K ещё и так, чтобы выполнялось $1/n_k < \delta$. Так как по построению при всех $k > K$ $|x_{n_k} - y_{n_k}| < 1/n_k$, то

$$|y_{n_k} - x_0| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < 2\delta,$$

откуда следует, что подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ тоже сходится к x_0, то есть пределы подпоследовательностей $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$при $k \to \infty$ совпадают. Но $x_0 \in [a, b]$ по предельному переходу в неравенствах, а тогда по условию функция f непрерывна в точке x_0. В силу определения по Гейне непрерывной функции при любом $\epsilon > 0$ $|f(x_{n_k}) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ и $|f(y_{n_k}) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ при достаточно больших k. Если взять $\epsilon = \varepsilon_1$, то получим цепочку неравенств:

$$\varepsilon_1 > |f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(y_{n_k}) - f(x_0)| \geq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_1.$$

Таким образом, приходим к противоречию с неравенством (1). □

Упражнение. Верно ли обратное: если функция f равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она непрерывна на этом отрезке? Следует ли из равномерной непрерывности функции на множестве непрерывность функции на этом множестве?

В качестве **упражнения** полезно обобщить теорему Гейне – Кантора на компакты.

Существование и непрерывность обратной функции

Определение 49. *Пусть функция $f : E \to D$ осуществляет биекцию между E и D. Если каждому $y \in D$ поставить в соответствие то $x \in E$, для которого $f(x) = y$, то тем самым будет определена функция, отображающая множество D во множество E. Она называется **обратной** для функции f и обозначается f^{-1}. Таким образом, $f^{-1} : D \to E$.*

Пример 29. *1) Пусть $f(x) = x^2, E = [0, +\infty)$. Тогда $D = [0, +\infty)$. В следующей лекции будет определена обратная к f функция, которая встречалась в школьной программе, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, причём $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.*
2) Пусть снова $f(x) = x^2$, но $E = \mathbb{R}$. Тогда $D = [0, +\infty)$, но отображение f не биективно, поэтому обратной функции у f на всей прямой нет.

Теорема 25. *(**Критерий непрерывности монотонной функции**). Монотонная на отрезке $[a, b]$ функция f, непрерывна на этом отрезке тогда и только тогда, когда множеством её значений является отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$.*

Перед доказательством отметим, что $f(a) \leq f(b)$, если f не убывает, и $f(a) \geq f(b)$, если f не возрастает.

Доказательство. **Необходимость.** Если $c \in [a, b]$, то $f(c)$ лежит между $f(a)$ и $f(b)$ в силу монотонности. По теореме Коши о непрерывной функции функция f принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$. Тем самым доказано, что область значения функции f – это отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$.

Достаточность. Предположим, что функция f монотонна на отрезке $[a, b]$, область её значений – отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$, но f имеет разрыв в точке $x_0 \in [a, b]$. Тогда по теореме о разрывах монотонной функции (см. предыдущую лекцию) у f может быть разрыв только первого рода, то есть если $x_0 \in (a, b)$, то в точке разрыва существуют левый и правый пределы, но они не равны между собой:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \neq B = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Один из интервалов $(A, f(x_0))$ или $(f(x_0), B)$ непуст, и в нём нет значений функции f. В силу монотонности функции f этот интервал содержится в отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$, поэтому этот отрезок не входит целиком в область значений функции f. Если же $x_0 = a$, то в этой точке существует правый предел, равный $B \neq f(a)$, а тогда интервал $(f(a), B)$ не содержит ни одного значения функции f. Случай $x_0 = b$, разбирается аналогично, только теперь в точке x_0 существует левый предел $A \neq f(b)$. В любом из случаев получаем противоречие с тем, что область значений функции является отрезком. $\square$

Теорема 26. ***(Теорема об обратной функции).*** *Пусть функция f непрерывна и строго монотонна (то есть возрастает или убывает) на отрезке $[a, b]$. Тогда функция f имеет обратную функцию f^{-1}, определенную на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$, причём f^{-1} строго монотонна и непрерывна на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$ и характер монотонности функций f и f^{-1} одинаковый.*

Доказательство. То, что образом функции f является отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$, сразу следует из предыдущей теоремы, то есть f является сюръекцией отрезка $[a, b]$ на отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$. Инъекция вытекает из строгой монотонности: двум разным значениям функции соответствуют два разных значения аргумента. Таким образом, f является биекцией, поэтому обратная функция f^{-1} существует по определению.

Монотонность функции f^{-1} следует из того, что если, например, f возрастает, то $f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2)) \Leftrightarrow x_1 < x_2$, то есть f^{-1} тоже возрастает, и аналогично для убывания. По определению, функция f^{-1} определена на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$, а областью её значений является отрезок $[a, b]$, поэтому функция f^{-1} непрерывна в силу предыдущей теоремы. $\square$

Многие элементарные функции (подробнее об этих функциях см. следующую лекцию) определяются с помощью этой теоремы. Некоторые примеры будут рассмотрены на следующей лекции.

Лекция 12

Элементарные функции

В этой лекции мы определим некоторые из элементарных функций.
К элементарным функциям относят:

1. многочлены $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i,\ a_i \in \mathbb{R}\ (i = 0,\ ...,\ n),\ a_n \neq 0;$
2. рациональные функции – отношения многочленов: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P,\ Q$ – многочлены;
3. показательные функции: $f(x) = a^x,\ a > 0, a \neq 1;$
4. логарифмические функции $f(x) = \log_a x,\ a > 0, a \neq 1;$
5. степенные функции с действительным показателем: $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x},\ x > 0;$
6. тригонометрические функции (включая обратные);
7. композиции всех этих функций.

В школе строгие определения элементарных функций не давались, а лишь описывались их свойства. Мы обладаем достаточным теоретическим аппаратом для того, чтобы определить многие из перечисленных функций, но с тригонометрическими пока имеются сложности, так как для их строгого определения нужно понятие длины дуги окружности, которое появится только в курсе интегрального исчисления, либо понятие степенного ряда. Отметим, однако, что для целей нашего курса строгих определений всех этих функций и не требуется, так как они являются лишь вспомогательным материалом при изучении курса анализа. Тем не менее мы определим часть из этих функций.

Непрерывность степенных функций и рациональные степени положительных чисел

Прежде всего, отметим, что функция $f(x) = x$ непрерывна на всей оси, так как

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \lim_{x \to a} x = a = f(a),$$

поэтому функция $f(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot ... \cdot x}_{n}$ раз $(n \in \mathbb{N})$ непрерывна на всей оси как произведение n непрерывных функций. Отсюда следует непрерывность многочлена на всей оси, так как любой многочлен представляет собой линейную комбинацию непрерывных функций. Кроме того, любая рациональная функция непрерывна во всех точках, где знаменатель не обращается в нуль, так как она представляет собой отношение двух непрерывных функций.

Пусть теперь $x \geq 0$. Докажем, что $f(x) = x^n$ строго возрастает. Действительно, пусть $a > b > 0$, тогда

$$f(a) = a^n = a^{n-1} \cdot a > a^{n-1} \cdot b > a^{n-2} \cdot b^2 > ... > b^n = f(b),$$

а $f(0) < f(a)\ \forall a > 0$.

Из непрерывности и строгой монотонности по теореме об обратной функции следует, что для функции $f(x) = x^n$ существует обратная к f функция $g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$. При этом в силу той же теоремы об обратной функции g непрерывна и возрастает при всех $x \geq 0$, так как это верно для любого отрезка, содержащегося в луче $[0, +\infty)$.

Определим **степень с рациональным показателем**.

Пусть $x > 0,\ y = \sqrt[n]{x},\ z = \sqrt[n]{x^m}$. Тогда $y^n = x,\ y^{nm} = x^m,\ z^n = x^m$, откуда $(y^m)^n = z^n$ и $y^m = z \iff (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$. Таким образом, операции взятия корня и возведения в степень с целочисленным показателем перестановочны и мы можем использовать следующие обозначения: $z = x^{m/n},\ z^{-1} = x^{-m/n}$.

Покажем, что свойства, справедливые для степеней с целыми показателями, выполняются и для степеней с рациональными показателями.

Пусть $r = \frac{a}{b},\ r_1 = \frac{a_1}{b_1},\ a, a_1 \in \mathbb{Z},\ b, b_1 \in \mathbb{N}$. Пусть $d = x^{\frac{1}{bb_1}}$. Тогда

$$x^r \cdot x^{r_1} = d^{ab_1} d^{a_1 b} = d^{ab_1 + a_1 b} = x^{(ab_1 + a_1 b)/bb_1} = x^{r + r_1}$$

и

$$(x^r)^{r_1} = (d^{ab_1})^{a_1/b_1} = d^{aa_1} = x^{aa_1/bb_1} = x^{rr_1}.$$

Таким образом, мы можем определить степень с рациональным показателем для любого положительного числа. Покажем, что при $x > 1$ рациональная степень x возрастает с ростом показателя.

Действительно, при $x > 1,\ r > r_1$ имеем $d > 1,\ ab_1 > a_1 b,\ d^{ab_1} > d^{a_1 b}$ поэтому $x^r > x^{r_1}$, то есть при возрастании $r \in \mathbb{Q}$ и $x > 1$ степень x^r тоже возрастает.

Построение и основные свойства экспоненты

Пусть теперь $x = e$. В предыдущем пункте мы определили степень с рациональным показателем, в частности, при любом основании $x > 1$, поэтому число e в любой рациональной степени определено.

Наша ближайшая цель – определить e^α, где $\alpha \notin$. Для этого нам потребуется вспомогательное утверждение.

Предложение 22. *Пусть* $r \in$ *и* $0 < r < 1$. *Тогда* $e^r < 1 + \frac{r}{1-r}$.

Доказательство. Ранее при всех $b \in \mathbb{N}$ мы установили справедливость неравенств

$$\left(1 + \frac{1}{b}\right)^b < e < \left(1 + \frac{1}{b}\right)^{b+1},$$

а тогда $e^{\frac{1}{b+1}} < 1 + \frac{1}{b} < e^{\frac{1}{b}}$, поэтому

$$e^{\frac{1}{b+1}} < 1 + \frac{1}{b} = \frac{1}{1 - \frac{1}{b+1}} \Leftrightarrow\ e^{\frac{1}{-(b+1)}} > 1 - \frac{1}{b+1}.$$

Последнее неравенство выполнено и при $b = 0$, поэтому при всех натуральных b выполнены неравенства $e^{\frac{1}{b}} > 1 + \frac{1}{b}$ и $e^{-\frac{1}{b}} > 1 - \frac{1}{b}$.

Теперь перейдём к рациональным числам. Положим $|r_1| < 1,\ r_1 = \frac{m}{n}$. Тогда $|m| < n$ и по неравенству Бернулли

$$(e^{\pm\frac{1}{n}})^{|m|} > \left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^{|m|} \geq 1 \pm \frac{|m|}{n},$$

поэтому $e^{m/n} = e^{r_1} > 1 + r_1$. Тогда при $0 < r < 1$, полагая $r_1 = -r$, получим $e^{-r} > 1 - r$, что равносильно

$$e^r < \frac{1}{1-r} = 1 + \frac{r}{1-r}.$$

□

Теперь определим e^α, где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Возьмём такие рациональные числа r_1, r_2, что $r_1 < \alpha < r_2$. Так как с ростом рационального показателя r степень e^r тоже возрастает, то при всех числах $r_1 : r_1 \in \mathbb{Q} \wedge r_1 < \alpha$ множество $M_1 = \{e^{r_1} | r_1 \in \mathbb{Q} \wedge r_1 < \alpha\}$ будет ограничено сверху числом e^{r_2} поэтому существует $\sup\limits_{r_1<\alpha}\{M_1\} = \gamma_1$. Точно так же доказывается, что существует $\gamma_2 = \inf\limits_{r_2>\alpha} M_2$, где $M_2 = \{e^{r_2} | r_2 \in \mathbb{Q} \wedge r_2 > \alpha\}$.

Покажем, что $\gamma_1 = \gamma_2$. Так как каждое число e^{r_2} является верхней гранью множества M_1, а $\gamma_1 = \sup M_1$, то $\gamma_1 \le e^{r_2}$, причем это верно для всех $r_2 > \alpha$, поэтому γ_1 – нижняя грань для M_2, а тогда $\gamma_1 \le \gamma_2 = \inf M_2$.

Выберем такие рациональные r_1 и r_2, что

$$[\alpha] < r_1 < \alpha < r_2 < [\alpha] + 1.$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$e^{r_1} \le \gamma_1 \le \gamma_2 \le e^{r_2} \le e^{[\alpha]+1}$$

поэтому

$$0 \le \gamma_2 - \gamma_1 \le e^{r_2} - e^{r_1} = e^{r_1}(e^{r_2-r_1} - 1) \le e^{[\alpha]+1}\frac{r_2 - r_1}{1 - (r_2 - r_1)},$$

где в последнем переходе использовано предложение 1.

При этом $\gamma_2 - \gamma_1$ – фиксированное число, а разность $r_2 - r_1$ положительна и может быть сколь угодно малой, так как в любой окрестности α есть рациональные числа, а тогда $\gamma_2 = \gamma_1$. Положим $\gamma_2 = \gamma_1 = e^\alpha$. Таким образом, мы определили функцию $y = e^x$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Докажем теперь основные свойства этой функции.

Предложение 23. *1) $f(x) = e^x$ возрастает на $\mathbb{R}$; 2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta$.*

Доказательство. **1)** Если $r_1 < \alpha < r_2,\ r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, то

$$e^{r_1} < e^\alpha < e^{r_2}$$

в силу определения степени e с иррациональным показателем. Если теперь $\alpha < \beta$, то существует такое $r_3 \in \mathbb{Q} \cap (\alpha, \beta)$, что

$$e^\alpha < e^{r_3} < e^\beta$$

откуда получаем, что $f(x) = e^x$ строго монотонна.

2) Для рациональных чисел это свойство доказано в предыдущем разделе.

Пусть $\mu = \alpha + \beta$. Если $\mu \in \mathbb{R}\setminus$, то

$$e^\mu = \sup_{r_1<\mu} e^{r_1} = \inf_{r_2>\mu} e^{r_2}.$$

Пусть $r_1 = r_1' + r_1''$, где $r_1' < \alpha,\ r_1'' < \beta,\ r_2 = r_2' + r_2'',\ r_2' > \alpha,\ r_2'' > \beta$. Тогда

$$e^{r_1} = e^{r_1'+r_1''} < e^\alpha e^\beta < e^{r_2'+r_2''} = e^{r_2}.$$

Но при этом $e^{r_1} < e^\mu < e^{r_2}$, откуда получаем

$$|e^\mu - e^\alpha e^\beta| < e^{r_2} - e^{r_1}.$$

Разность $|e^\mu - e^\alpha e^\beta|$ может быть сколь угодно мала при произвольных рациональных $r_1,\ r_2$ с условием $r_1 < \mu < r_2,\ r_1,\ r_2 \in$ (снова в силу предложения 1), поэтому

$$e^\mu = e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta.$$

□

Непрерывность показательной и тригонометрической функций

В этом разделе мы докажем непрерывность функции $f(x) = a^x,\ a > 1$, а тогда непрерывность показательной функции легко выводится и при $0 < a < 1$, так как $a = \frac{1}{b}$, где $b > 1$.

Отметим, что определить показательную функции с основанием a можно, используя уже определённую функцию $y = e^x$ и обратную к ней, то есть натуральный логарифм, существование и свойства которого после доказательства непрерывности ниже и уже доказанных выше свойств экспоненты станут очевидными.

В следующем предложении мы докажем непрерывность показательной функции в каждой точке.

Предложение 24. *В любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = a^x$ непрерывна.*

Доказательство. Пусть $a > 1$. Нам необходимо доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x : |x - x_0| < \delta\ |a^x - a^{x_0}| < \varepsilon.$$

Это равносильно тому, что $|a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon \cdot a^{-x_0} = \varepsilon_1$. Мы сразу можем считать, что $\varepsilon_1 < 1$. Итак, в качестве δ мы хотим подобрать такое число, что при $|x - x_0| < \delta\ |a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon_1$.

Так как $-\delta < x - x_0 < \delta$ и $a > 1$, то

$$a^{-\delta} < a^{x-x_0} < a^{\delta},$$

что равносильно

$$a^{-\delta} - 1 < a^{x-x_0} - 1 < a^{\delta} - 1.$$

Подберём δ так, чтобы выполнялось неравенство $a^{\delta} - 1 < \varepsilon_1$. Отметим, что тогда

$$a^{-\delta} > \frac{1}{1+\varepsilon_1} = 1 - \frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1} > 1 - \varepsilon_1,$$

то есть будет выполнено неравенство $|a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon_1$.

Пусть $N = \left[\frac{1}{\delta}\right]$, тогда $\frac{1}{\delta} \geq N$, откуда следует $a^{1/N} \geq a^{\delta}$, поэтому если будет выполнено неравенство $1 + \varepsilon_1 > a^{1/N}$, то тем более будет верно $a^{\delta} - 1 < \varepsilon_1$.

Используя неравенство Бернулли, можем подобрать N (а тогда и δ) из неравенства

$$(1 + \varepsilon_1)^N \geq 1 + N\varepsilon_1 > a.$$

Если $N > \frac{a}{\varepsilon_1}$, то $1 + N\varepsilon_1 > 1 + \frac{a}{\varepsilon_1}\varepsilon_1 > a$, то есть неравенство заведомо выполнено. Тогда в силу задания N можно положить $\delta = \frac{\varepsilon_1}{a+1}$, так как в этом случае получим

$$N = \left[\frac{1}{\delta}\right] = \left[\frac{a+1}{\varepsilon_1}\right] \geq \left[\frac{a+\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right] = \left[\frac{a}{\varepsilon_1}\right] + 1 > \frac{a}{\varepsilon_1}.$$

Таким образом, подобрано δ, при котором

$$-\varepsilon_1 < a^{-\delta} - 1 < a^{x-x_0} - 1 < a^{\delta} - 1 < \varepsilon_1,$$

чем и доказана непрерывность функции $f(x) = a^x$ в точке x_0. □

Хотя мы и не будем строго определять функцию $f(x) = \sin x$, но докажем её непрерывность при любом $x \in \mathbb{R}$.

Предложение 25. *В любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = \sin x$ непрерывна.*

Доказательство. При доказательстве первого замечательного предела для всех $x \in \mathbb{R}$ мы установили неравенство $|\sin x| \le |x|$. Воспользовавшись им, получаем для фиксированного $x_0 \in \mathbb{R}$

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \le 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|$$

поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно взять $\delta = \varepsilon$ и тогда

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon \ \forall x : |x - x_0| < \varepsilon,$$

что и означает, что $\sin \in C(x_0)$. □

Предложение 26. *Функции $f_1(x) = \cos x$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а функции $f_2(x) = \operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}$ и $f_3(x) = \operatorname{ctg} x := \frac{\cos x}{\sin x}$ непрерывны в точках, где их знаменатели не обращаются в нуль.*

Доказательство. Так как при любом $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, а функции $g(y) = \sin y$ и $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$ непрерывны на всей вещественной оси, то функция $g(f(x)) = \cos x$ непрерывна по теореме о композиции непрерывных функций. Тогда f_2 и f_3 непрерывны во всех точках, где их знаменатели не нуль, как отношения непрерывных функций, то есть в силу одного из локальных свойств непрерывных функций. □

Упражнение. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется *липшицевой на E,* если существует такая константа $L > 0$, что

$$\forall x, y \in E \ |f(x) - f(y)| \le L|x - y|,$$

где L называется *константой Липшица,* соответствующей функции f. Доказать, что любая липшицева на E функция непрерывна на E.

Отметим, что, например функция $f(x) = \sin x$ является липшицевой на всей прямой, что следует из приведённого выше доказательства непрерывности синуса.

Вспоминая определение предела функции в терминах бесконечно малых, для некоторой окрестности $U(x_0)$ любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ можем записать

$$\sin x = \sin x_0 + \alpha(x), \ \ a^x = a^{x_0} + \beta(x),$$

где $\alpha(x) \to 0, \ \beta(x) \to 0$, при $x \to x_0$. Если $x_0 = 0$, то, как было доказано в предыдущих лекциях, мы можем уточнить равенства:

$$\sin x = x + o(x), \ \ a^x = 1 + x\ln a + o(x), \ \ x \to 0.$$

Построение некоторых обратных функций

Так как $f(x) = e^x$ монотонно возрастает и непрерывна на всей прямой, то в силу теоремы об обратной функции существует функция $g(x) = f^{-1}(x)$, отображающая луч $(0; +\infty)$ на $\mathbb{R}$. Хотя теорему об обратной функции мы доказали для отрезка, здесь обратная функция существует именно на множестве всех положительных чисел (почему?). Эту функцию называют натуральным логарифмом $g(x) := \ln x, \ x > 0$. По теореме об обратной функции она непрерывна, возрастает и $x = e^{\ln x}$ откуда следует

$$e^{\ln xy} = xy = e^{\ln x}e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}$$

то есть $\ln xy = \ln x + \ln y$. Если α – иррациональное число и $x > 0$, то $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Таким образом, все свойства степенной функции следует из доказанных выше свойств показательной и логарифмической функций.

Так как $f(x) = \sin x$ непрерывна на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и монотонно возрастает на этом отрезке, то можем определить обратную функцию $g(x) = \arcsin x$. Она определена при $-1 \le x \le 1$, отображает этот отрезок в $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и монотонно возрастает.

Если $f(x) = \operatorname{tg} x$, то $f \in C(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и возрастает на этом интервале, $f(x) = \operatorname{tg} x \in \mathbb{R}$ поэтому $g(x) = \operatorname{arctg} x$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{arctg} x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и монотонно возрастает.

Аналогично можно определить $g(x) = \arccos x$ и $g(x) = \operatorname{arcctg} x$.