

**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА**

**НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ**

(для студентов химических специальностей)

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2025

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций.

Предлагаемая Вашему вниманию серия пособий содержит описание курса лекций по линейной алгебре, многие годы читавшегося на общем потоке химического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче ими экзаменов и зачётов.

3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

3.1. Решение линейной однородной системы уравнений

3.2. Неоднородная система уравнений. Принцип суперпозиции решений. Теорема Кронекера – Капелли

3.3. Переход к новому базису пространства

3.1. Решение линейной однородной системы уравнений

Мы ранее установили, что множество решений линейной однородной системы уравнений

$$A\bar{x} = \bar{0} \quad (3.1)$$

образует линейное пространство, представляющее собой некоторое подпространство $\mathbb{R}^n$.

Решая систему (3.1) методом Гаусса, придем к системе вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1l}x_l = -a_{1,l+1}x_{l+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2l}x_l = -a_{2,l+1}x_{l+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ a_{ll}x_l = -a_{l,l+1}x_{l+1} - \dots - a_{ln}x_n, \end{cases} \quad (3.2)$$

в которой $l \leq n, a_{11} \neq 0, \dots, a_{ll} \neq 0$ и в случае $l = n$ правые части уравнений системы (3.2) равны 0.

Матрица системы (3.2) выглядит так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & \dots & a_{ll} & a_{l,l+1} & a_{ln} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Теорема 3.1. Ранг матрицы (3.3) равен l .

► Теорема означает, что строки (3.3) линейно независимы. Для доказательства предположим противное, что

$$\bar{0} = c_1 \bar{a}_1 + \dots + c_l \bar{a}_l, \quad (3.4)$$

где

$$\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),$$

$$\bar{a}_2 = (0, a_{22}, \dots, a_{2n}).$$

... ..

$$\bar{a}_l = (0, \dots, a_{ll}, \dots, a_{ln}).$$

Первая координата правой части равенства (3.4) равна $c_1 a_{11}$, а первая координата правой части равна 0. Та как $a_{11} \neq 0$, то $c_1 = 0$ и так далее. В итоге приходим при каждом i к равенству $c_i a_{ii} = 0$, из которого следует, что $c_i = 0$, так как $a_{ii} \neq 0$. Таким образом, из (3.4) вытекает, что $c_1 = \dots = c_l = 0$, то есть что векторы $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_l$ — строки матрицы (3.3) — линейно независимы. ◀

Теорема 3.2. Размерность пространства решений системы (2.16) равна $n - l$.

► Так как $a_{ii} \neq 0$, последнее из равенств (3.2) при делении обеих его частей на a_{ll} дает

$$x_l = -\frac{a_{l,l+1}}{a_{ll}} x_{l+1} - \dots - \frac{a_{ln}}{a_{ll}} x_n. \quad (3.5)$$

Вводя очевидные обозначения для сокращения записи, перепишем (3.5) в виде:

$$x_l = \gamma_{l,l+1} x_{l+1} + \dots + \gamma_{ln} x_n. \quad (3.6)$$

Подставим это значение в предпоследнее из уравнений (3.2), перенесем все его члены с $x_{l+1}, \dots, x_n$ в его правую часть и разделим обе части полученного уравнения на $a_{l-1,l-1} \neq 0$. Получим:

$$x_{l-1} = \gamma_{l-1,l+1} x_{l+1} + \dots + \gamma_{l-1,n} x_n. \quad (3.7)$$

Подставим выражения (3.6) и (3.7) для x_l и x_{l-1} в следующее уравнение системы (3.2), перенесем все члены с $x_{l+1}, \dots, x_n$ в его правую часть и разделим обе части на $a_{l-2,l-2} \neq 0$ и так далее. В итоге получим, что для всех $k, k \leq l$ выполнено равенство

$$x_k = \gamma_{k,l+1} x_{l+1} + \dots + \gamma_{kn} x_n. \quad (3.8)$$

Положим $x_{1,l+1} = 1, x_{1,l+2} = 0, \dots, x_{1,n} = 0$ и вычислим по формуле (3.8) остальные значения $x_{1,k}, k = 1, \dots, l$. При этом получится решение системы (3.2):

$$\bar{x}_1 = (x_{11}, \dots, x_{1l}, 1, 0, \dots, 0).$$

Аналогично, полагая $x_{2,l+1} = 0, x_{2,l+2} = 1, \dots, x_{2,n} = 0$, получим ещё одно решение системы (3.2):

$$\bar{x}_2 = (x_{21}, \dots, x_{2l}, 0, 1, 0, \dots, 0).$$

Продолжим этот процесс и получим решения системы:

$$\bar{x}_k = (x_{k1}, \dots, x_{kl}, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0), k = 1, \dots, n - l \quad (3.9)$$

(1 стоит на $(l + k)$ -м месте).

Докажем, что векторы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-l}$ линейно независимы.

Предположим противное, что

$$c_1 \bar{x}_1 + \dots + c_{n-l} \bar{x}_{n-l} = \bar{0}. \quad (3.10)$$

Последние $n - l$ координат вектора, стоящего в левой части равенства (3.10) равны, в соответствии с (3.9), числам $c_1, \dots, c_{n-l}$. Но последние $n - l$ координат правой части равенства (3.10) равны 0. Поэтому $c_1 = \dots = c_{n-l} = 0$ и это означает, что векторы (3.9) линейно независимы.

Покажем, что любое решение $\bar{x}$ системы (3.2) есть линейная комбинация векторов (3.9). Действительно, пусть $\bar{x}$ – решение системы – имеет координаты:

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_n).$$

Линейная комбинация векторов (3.9) вида:

$$x_{l+1} \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_{n-l}$$

имеет тот же набор последних $n - l$ координат, то есть те же числа $x_{l+1}, \dots, x_n$. Но формулы (3.8) показывают, что если совпали координаты $x_{l+1}, \dots, x_n$, то должны совпасть и координаты $x_1, \dots, x_l$, то есть

$$\bar{x} = x_{l+1} \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_{n-l}. \blacktriangleleft$$

Примечание. Мы получили, что векторы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-l}$ образуют базис пространства решений системы (3.2).

Определение. Любой базис пространства решений системы (3.1) называется ее *фундаментальной системой решений*.

Теорема 3.3. Пусть l – ранг матрицы A системы (3.1). Тогда размерность пространства ее решений равна $n - l$.

► Уравнения (3.2) являются линейными комбинациями уравнений системы (3.1). В свою очередь, проделывая над уравнениями (3.2) обратные преобразования, мы получим систему (3.1), причем уравнения (3.1) являются линейными комбинациями уравнений (3.2). По следствию теоремы 2.12 ранги матриц систем (3.1) и (3.2) совпадают и равны l по теореме 2.13. Системы (3.1) и

(3.2) равносильны, так как система (3.2) получена из (3.1) в результате применения метода Гаусса. Поэтому размерность пространства решений (3.1) равна $n - l$. Теорема доказана. ◀

3.2. Неоднородная система уравнений. Принцип суперпозиции решений. Теорема Кронекера – Капелли

Рассмотрим неоднородную систему уравнений:

$$A\bar{x} = \bar{b}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Теорема 3.4. Если система (3.11) имеет решение $\bar{x}_0$, то для любого другого ее решения $\bar{x}$ существует решение $\bar{X}$ однородной системы

$$A\bar{X} = \bar{0} \quad (3.12)$$

такое, что $\bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{X}$.

► Если $A\bar{x} = \bar{b}$ и $A\bar{x}_0 = \bar{b}$, то $A(\bar{x} - \bar{x}_0) = \bar{b} - \bar{b} = \bar{0}$, то есть $\bar{x} - \bar{x}_0 = \bar{X}$ удовлетворяет системе (3.12), что и утверждалось. ◀

Следствие (принцип суперпозиции решений). Если векторы $\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_k$ являются решениями, соответственно, систем $A\bar{x}_l = \bar{b}_l$, то вектор $\bar{x} = \bar{x}_0 + \dots + \bar{x}_k$ является решением системы $A\bar{x} = (\bar{b}_0 + \dots + \bar{b}_k)$.

Действительно, $A\bar{x} = A(\bar{x}_0 + \dots + \bar{x}_k) = A\bar{x}_0 + \dots + A\bar{x}_k = \bar{b}_0 + \dots + \bar{b}_k$.

Назовем *расширенной матрицей системы уравнений* (3.11) матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & b_m \end{array} \right), \quad (3.13)$$

которую будем обозначать $(A|\bar{b})$.

При решении системы (3.11) методом Гаусса использовались преобразования уравнений этой системы, при которых происходили следующие преобразования матрицы (3.13):

- перестановка двух строк местами;
- умножение всех элементов строки на отличное от нуля число;

- прибавление ко всем элементам строки элементов другой строки, умноженное на одно и тоже число.

В результате использования метода Гаусса исходная система уравнений (3.11) либо придет к системе вида (3.2), либо к несовместной системе, содержащей уравнение

$$0 \cdot x_{l+1} + \dots + 0 \cdot x_n = b_{l+1} \neq 0.$$

В первом случае расширенная матрица системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ll} & \dots & a_{ln} & b_l \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Во втором случае получится матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ll} & \dots & a_{ln} & b_l \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{l+1} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Обе эти матрицы имеют вид (3.3) и поэтому по теореме 3.1 их строки линейно независимы. При этом ранг матрицы (3.14) равен l , так как она имеет ненулевой минор из элементов первых l строк и столбцов, ранг матрицы (3.15) равен $l + 1$, так как она имеет не равный нулю минор из элементов первых $l + 1$ строк и первых l и последнего столбца расширенной матрицы.

Вывод, сделанный нами относительно разрешимости системы (3.11), можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 3.5 (Кронекер, Капелли). Система $A\bar{x} = \bar{b}$ разрешима тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы $(A|\bar{b})$.

► Действительно, ранг расширенной матрицы (3.14) имеющей решение системы равен числу l , как и ранг матрицы A . Ранг расширенной матрицы неразрешимой системы (3.15) на 1 больше, чем ранг A . ◀

Задача 1.1. Проверить выполнение условий теоремы Кронекера – Капелли и понять, сколько решений имеет система
$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2. \end{cases}$$

Решение.

Рассмотрим расширенную матрицу системы и сделаем эквивалентные преобразования, приводящие матрицу к ступенчатому виду.

$$(A|\bar{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{(2) \rightarrow 2(1) - (2)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim (2 \quad 3 | 1).$$

Напомним, что ранг матрицы не меняется при эквивалентных преобразованиях. Из полученной матрицы видно, что $\text{rang } A = \text{rang}(A|\bar{b}) = 1$, поэтому решение у системы существует. Но количество уравнений меньше, чем количество неизвестных. Поэтому система имеет бесконечно много решений.

Ответ: решений бесконечно много.

Задача 1.2. Проверить выполнение условий теоремы Кронекера – Капелли и понять, сколько решений имеет система $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 1. \end{cases}$

Решение.

Рассмотрим расширенную матрицу системы и сделаем эквивалентные преобразования, приводящие матрицу к ступенчатому виду.

$$(A|\bar{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(2) \rightarrow 2(1) - (2)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Напомним, что ранг матрицы не меняется при эквивалентных преобразованиях. Из полученной матрицы видно, что $\text{rang } A = 1$, $\text{rang}(A|\bar{b}) = 2$, поэтому у системы нет решения.

Ответ: нет решения.

Задача 1.3. Проверить выполнение условий теоремы Кронекера – Капелли и понять, сколько решений имеет система $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 5y = 2. \end{cases}$

Решение.

Рассмотрим расширенную матрицу системы и сделаем эквивалентные преобразования, приводящие матрицу к ступенчатому виду.

$$(A|\bar{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{(2) \rightarrow 3(1) - 2(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

Напомним, что ранг матрицы не меняется при эквивалентных преобразованиях. Из полученной матрицы видно, что $\text{rang } A = \text{rang}(A|\bar{b}) = 2$, по-

этому у системы есть решение. Так как ранг матрицы A равен количеству неизвестных, то определитель матрицы не равен нулю, и система имеет единственное решение.

Ответ: единственное решение.

Напомним

Определение. Фундаментальная система решений (ФСР) – это базис в пространстве решений однородной системы уравнений.

Так как базис в пространстве определен не однозначно, то и фундаментальную систему решений можно задать по-разному.

Теорема. Пусть n – количество неизвестных, r – ранг матрицы коэффициентов, p – размерность пространства решений. Тогда $p = n - r$.

Задача 2.1. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

С помощью эквивалентных преобразований приведем матрицу коэффициентов системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3) \rightarrow 2(1) - (3)]{(2) \rightarrow 3(1) - 2(2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда сразу видно, что $\text{rang } A = 2$, количество неизвестных $n = 3$, поэтому размерность пространства решений $p = 1$, то есть фундаментальная система решений будет состоять из одного вектора. Как его проще получить и затем записать?

Преобразуем полученную матрицу к такому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1) \rightarrow 7(1) - (2)} \begin{pmatrix} 14 & 0 & -26 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 0 & -13 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$
зависимые
переменные
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}$
независимая
переменная

То есть мы часть матрицы привели к диагональному виду. Переменные, столбцы коэффициентов которых вошли в эту матрицу (зависимые), будут

выражаться через переменные, столбцы коэффициентов которых не вошли в эту матрицу. В этом случае получаем:

$$\begin{cases} 7x_1 = 13x_3 \\ 7x_2 = 2x_3, \end{cases}$$

при этом неизвестная x_3 может принимать любые действительные значения.

Для определения фундаментальной системы решений будем привыкать записывать следующую таблицу, при этом независимой переменной x_3 дадим любое, удобное нам значение. В этом случае, например, $x_3 = 7$. Тогда

x_1	x_2	x_3
13	2	7

Отсюда сразу видно, что фундаментальная система решений состоит из одного вектора $\bar{y}_1 = (13, 2, 7)$, а общее решение можно записать в виде $(13c, 2c, 7c)$, $c \in \mathbb{R}$.

Ответ: $\bar{y}_1 = (13, 2, 7)$ – ФСР; $c(13, 2, 7)$, $c \in \mathbb{R}$ – общее решение.

Задача 2.2. Найти фундаментальную систему решений и общее решение

однородной системы уравнений
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

С помощью эквивалентных преобразований приведем матрицу коэффициентов системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\begin{matrix} (2) \rightarrow 3(1) - (2) \\ (3) \rightarrow 4(1) - (3) \\ (4) \rightarrow 3(1) - (4) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 3 & 18 & -15 \\ 0 & -2 & -12 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда сразу видно, что $\text{rang } A = 2$, количество неизвестных $n = 4$, поэтому размерность пространства решений $p = 2$, то есть фундаментальная система решений (базис в пространстве решений) будет состоять из двух векторов. Как ее проще получить и затем записать?

Приведем полученную матрицу преобразуем к такому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1) \rightarrow (1) - 2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underbrace{1 \ 0}_{\text{зависимые}} & \underbrace{-8 \ 7}_{\text{независимые}} \\ \underbrace{0 \ 1}_{\text{зависимые}} & \underbrace{6 \ -5}_{\text{независимые}} \end{pmatrix}$$

То есть мы часть матрицы привели к диагональному виду. Переменные, столбцы коэффициентов которых вошли в эту матрицу (зависимые), будут выражаться через переменные, столбцы коэффициентов которых не вошли в эту матрицу (независимые переменные). В этом случае получаем:

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4, \end{cases}$$

при этом независимые переменные x_3 и x_4 могут принимать любые действительные значения.

Для определения фундаментальной системы решений создадим следующую таблицу, при этом независимым переменным x_3 и x_4 дадим следующие значения:

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\bar{y}_1$			1	0
$\bar{y}_2$			0	1

Отсюда сразу видно, что какими бы ни были координаты x_1 и x_2 векторов $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$, эти векторы все равно будут линейно независимы. Из полученной системы найдем координаты x_1 и x_2 векторов $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ и получим таблицу

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\bar{y}_1$	8	-6	1	0
$\bar{y}_2$	-7	5	0	1

Ответ: $\bar{y}_1 = (8, -6, 1, 0)$, $\bar{y}_2 = (-7, 5, 0, 1)$ – ФСР;

$c_1(8, -6, 1, 0) + c_2(-7, 5, 0, 1)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ – общее решение.

Задача 2.3. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

С помощью эквивалентных преобразований приведем матрицу коэффициентов системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\widetilde{\sim}]{\substack{(2) \rightarrow 3(1) - 2(2) \\ (3) \rightarrow 2(1) - (3)}} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда сразу видно, что $\text{rang } A = 2$, количество неизвестных $n = 4$, поэтому размерность пространства решений $p = 2$, то есть фундаментальная система решений (базис в пространстве решений) будет состоять из двух векторов.

В этом случае получить диагональную матрицу из первых двух столбцов не получится. Получим диагональную матрицу из 1-го и 4-го столбцов:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\widetilde{\sim}}^{(1) \rightarrow 5(1) - 3(2)} \begin{pmatrix} 10 & -20 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае диагональную матрицу образуют 1-й и 4-й столбцы, поэтому x_1 и x_4 – зависимые переменные, а x_2 и x_3 – независимые переменные, действительно,

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - \frac{2}{5}x_3 \\ x_4 = -\frac{7}{5}x_3. \end{cases}$$

при этом независимые переменные x_2 и x_3 могут принимать любые действительные значения.

Для определения фундаментальной системы решений создадим следующую таблицу, при этом независимым переменным x_2 и x_3 дадим следующие значения:

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\bar{y}_1$		1	0	
$\bar{y}_2$		0	1	

Отсюда сразу видно, что какими бы ни были координаты x_1 и x_4 векторов $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$, эти векторы все равно будут линейно независимы. Из полученной системы найдем координаты x_1 и x_4 векторов $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ и получим таблицу

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\bar{y}_1$	2	1	0	0
$\bar{y}_2$	$-\frac{2}{5}$	0	1	$-\frac{7}{5}$

Ответ: $\bar{y}_1 = (2, 1, 0, 0)$, $\bar{y}_2 = \left(-\frac{2}{5}, 0, 1, -\frac{7}{5}\right)$ – ФСР;

$c_1(2, 1, 0, 0) + c_2\left(-\frac{2}{5}, 0, 1, -\frac{7}{5}\right)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ – общее решение.

Замечание. Конечно, в качестве $\bar{y}_2$ можно взять вектор $(-2, 0, 5, -7)$ (с целыми координатами!).

3.3. Переход к новому базису пространства

Рассмотрим вопрос о переходе от одного базиса пространства V к другому его базису.

Пусть заданы два произвольных базиса пространства V : $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ и $\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n$. Каждый из векторов $\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n$ разложим по базису $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$.

Пусть

$$\bar{e}'_1 = c_{11}\bar{e}_1 + \dots + c_{n1}\bar{e}_n,$$

...

$$\bar{e}'_n = c_{1n}\bar{e}_1 + \dots + c_{nn}\bar{e}_n \quad (3.16)$$

Рассмотрим матрицу C :

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

(столбцы этой матрицы состоят из координат (3.16) векторов $\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n$).

Предположим, что вектор $\bar{x}$ имеет координаты $x_1, \dots, x_n$ в базисе $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ и координаты $x'_1, \dots, x'_n$ в базисе $\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n$.

Тогда, ввиду (3.16):

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x'_1 \bar{e}'_1 + \dots + x'_n \bar{e}'_n = x'_1 (c_{11} \bar{e}_1 + \dots + c_{n1} \bar{e}_n) + \dots + x'_n (c_{1n} \bar{e}_1 + \dots + c_{nn} \bar{e}_n) = \\ &= (c_{11} x'_1 + \dots + c_{n1} x'_n) \bar{e}_1 + \dots + (c_{n1} x'_1 + \dots + c_{nn} x'_n) \bar{e}_n.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Так как, по предположению, $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n$ из единственности разложения вектора по базису получаем, ввиду (3.18)

$$\begin{cases} c_{11} x'_1 + \dots + c_{n1} x'_n = x_1, \\ \dots \\ c_{n1} x'_1 + \dots + c_{nn} x'_n = x_n. \end{cases}\quad (3.19)$$

Равенство (3.18) можно, используя (3.16), записать в матричной форме

$$C \bar{x}' = \bar{x}, \quad (3.20)$$

где

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

обозначают столбцы из координат вектора $\bar{x}$ в базисах, соответственно, $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ и $\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n$.

Определитель матрицы C не равен 0 (говорят также, что C – **невырожденная матрица**) так как, в противном случае, по дополнению к свойству 8 определителей, установленному в конце предыдущего параграфа, были бы линейно зависимы строки матрицы C , что означает линейную зависимость векторов $\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n$.

Поэтому у матрицы C имеется обратная матрица C^{-1} и из (3.20) получаем, умножая обе его части слева на матрицу C^{-1} ,

$$C^{-1} C \bar{x}' = C^{-1} \bar{x}, \quad E \bar{x}' = C^{-1} \bar{x},$$

$$\bar{x}' = C^{-1} \bar{x}. \quad (3.21)$$

Отметим, что и равенства (3.16) можно записать в матричном виде:

$$(\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n) = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) C. \quad (3.22)$$

Это равенство несколько необычное: в нем координаты векторов $(\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n)$ и $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ – не числа, а векторы. Но поскольку определены произведения вектора на число и сумма векторов, запись (3.16) в виде (3.22) окажется не только осмысленной, но и весьма удобной. Отметим, что нам еще

много раз придётся встретиться с векторами и матрицами, элементы которых — не обязательно числа.

Рассмотрим важную задачу.

Пусть

$(\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n) = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)C'$ и вектор $\bar{x}$ имеет координаты $x'_1, \dots, x'_n$ в базисе $\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n$.

Пусть

$(\bar{e}''_1, \dots, \bar{e}''_n) = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)C''$ и тот же вектор $\bar{x}$ имеет координаты $x''_1, \dots, x''_n$ в базисе $\bar{e}''_1, \dots, \bar{e}''_n$.

Как связаны между собой координаты $x'_1, \dots, x'_n$ и $x''_1, \dots, x''_n$?

Для ответа на этот вопрос заметим, что согласно (3.20):

$$C' \bar{x}' = \bar{x} \quad (3.23)$$

$$C'' \bar{x}'' = \bar{x} \quad (3.24)$$

И, согласно (3.23), (3.24),

$$\bar{x}' = (C')^{-1} \bar{x}$$

Из (3.21), (3.24) найдем:

$$\bar{x}'' = (C'')^{-1} \bar{x} = (C'')^{-1} C' \bar{x}'.$$

В свою очередь, так как,

$$((C'')^{-1} C')^{-1} = (C')^{-1} C'', \quad (3.25)$$

имеем

$$\bar{x}' = (C')^{-1} C'' \bar{x}''.$$

Для доказательства равенства (3.25) установим, что для любых невырожденных матриц A, B

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Действительно,

$$AB B^{-1} A^{-1} = A E A^{-1} = A A^{-1} = E, B^{-1} A^{-1} A B = B^{-1} E B = B^{-1} B = E.$$

Рассмотрим еще одну важную задачу.

Предположим, что мы решаем систему линейных уравнений:

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad (3.26)$$

и произведем в ней замену переменных по формуле $\bar{x} = C\bar{x}'$. Какой вид будет иметь матрица системы в переменных $x'_1, \dots, x'_n$?

Ответ прост: в равенство $A\bar{x} = \bar{b}$ подставляем $\bar{x} = C\bar{x}'$, получим $A(C\bar{x}') = \bar{b}$. Используя ассоциативность умножения матриц, окончательно находим $(AC)\bar{x}' = \bar{b}$, то есть матрица системы (3.26) при замене примет вид AC .

При этом $\bar{x}' = (AC)^{-1}\bar{b} = C^{-1}A^{-1}\bar{b}$.

Задача 3.1. Доказать, что существует единственное преобразование трехмерного пространства, переводящее векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ соответственно в $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором заданы координаты всех векторов. То есть найти матрицу P , такую, что $B = PA$, где матрица B – это матрица, у которой по столбцам стоят координаты векторов $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$, а матрица A – это матрица, у которой по столбцам стоят координаты векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$. Тогда $P = BA^{-1}$, и конечно, $\bar{b}_1 = P\bar{a}_1, \bar{b}_2 = P\bar{a}_2, \bar{b}_3 = P\bar{a}_3$.

- 1) Пусть $\bar{a}_1 = (2, 3, 5), \bar{a}_2 = (0, 1, 2), \bar{a}_3 = (1, 0, 0)$ и $\bar{b}_1 = (1, 1, 1), \bar{b}_2 = (1, 1, -1), \bar{b}_3 = (2, 1, 2)$.

Тогда

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем A^{-1} .

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (3) \rightarrow 5(1) - 2(3) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (2) \rightarrow 3(1) - 2(2) \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & -5 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \\ & \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (3) \rightarrow 2(2) - (3) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (1) \rightarrow (1) - (3) \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (2) \rightarrow (2) + 3(3) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (1) \rightarrow (1) - (3) \end{smallmatrix}} \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Итак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$P = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица P , очевидно, определена однозначно.

Убедимся, что действительно выполняются условия $\bar{b}_1 = P\bar{a}_1$, $\bar{b}_2 = P\bar{a}_2$, $\bar{b}_3 = P\bar{a}_3$.

$$P\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$P\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$P\bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $P = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

2) Пусть $\bar{a}_1 = (2, 0, 3)$, $\bar{a}_2 = (4, 1, 5)$, $\bar{a}_3 = (3, 1, 2)$ и $b_1 = (1, 2, -1)$, $\bar{b}_2 = (4, 5, -2)$, $\bar{b}_3 = (1, -1, 1)$.

Тогда

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем A^{-1} .

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3) \rightarrow 3(1) - 2(3)} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & | & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\xrightarrow{(3) \rightarrow 2(2) - (3)} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2) \rightarrow 3(2) + (3)} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{(1) \rightarrow 3(1) - 4(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 6 & -14 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & -2 \end{array} \right).$$

Итак, $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, поэтому

$$P = BA^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что действительно выполняется, например, условие $\bar{b}_1 = P\bar{a}_1$ (остальные, если хотите, проверьте сами).

$$P\bar{a}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \bar{b}_1.$$

$$\text{Ответ: } P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.2. Составить формулы преобразования координат при переходе от базиса $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ («старого») к базису $(\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n)$ («новому»). Напомним, что это означает, что нужно найти матрицу C , такую, что координаты в «старом» и «новом» базисах будут связаны соотношением

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти матрицу C , надо составить матрицы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$, по столбцам которых стоят координаты базисных векторов $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ и $(\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n)$, соответственно. Тогда $\mathcal{E}' = \mathcal{E}C$, откуда получим, что $C = \mathcal{E}^{-1}\mathcal{E}' \Leftrightarrow C^{-1} = (\mathcal{E}')^{-1}\mathcal{E}$.

- 1) Пусть $\bar{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\bar{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\bar{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$
и $\bar{e}'_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\bar{e}'_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\bar{e}'_3 = (1, 0, 0, 1)$, $\bar{e}'_4 = (1, 1, 1, 1)$.

В этом случае

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \varepsilon' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $C^{-1} = (\varepsilon')^{-1}\varepsilon = (\varepsilon')^{-1}E = (\varepsilon')^{-1}$. Найдем $(\varepsilon')^{-1}$.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 2 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$C^{-1} = (\varepsilon')^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

И тогда

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Иногда преобразование координат бывает удобнее сразу записывать в виде:

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) \\ x'_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \\ x'_3 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \\ x'_4 = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4). \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}.$

- 1) Пусть $\bar{e}_1 = (1, 2, -1, 0)$, $\bar{e}_2 = (1, -1, 1, 1)$, $\bar{e}_3 = (-1, 2, 1, 1)$,
 $\bar{e}_4 = (-1, -1, 0, 1)$ и
 $\bar{e}'_1 = (2, 1, 0, 1)$, $\bar{e}'_2 = (0, 1, 2, 2)$, $\bar{e}'_3 = (-2, 1, 1, 2)$, $\bar{e}'_4 = (1, 3, 1, 2)$.

В этом случае

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathcal{E}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 2) Тогда $C^{-1} = (\mathcal{E}')^{-1}\mathcal{E}$. Найдем $(\mathcal{E}')^{-1}$.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 3 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -1 & 4 & 0 & -2 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -1 & 8 & 2 & -6 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 26 & 0 & -26 & 0 & 14 & -8 & -2 & 6 \\ 0 & 26 & 13 & 0 & 1 & -8 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 39 & 0 & -9 & -6 & -21 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -1 & 8 & 2 & -6 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 13 & 0 & -13 & 0 & 7 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 26 & 13 & 0 & 1 & -8 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & -3 & -2 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -1 & 8 & 2 & -6 \end{array} \right) \sim \end{aligned}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 13 & 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & -8 & 11 \\ 0 & 26 & 0 & 0 & 4 & -6 & 18 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & -3 & -2 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -1 & 8 & 2 & -6 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 13 & 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & -8 & 11 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & 2 & -3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & -3 & -2 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -1 & 8 & 2 & -6 \end{array} \right).$$

Итак, $(\mathcal{E}')^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & -6 & -8 & 11 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ -3 & -2 & -7 & 8 \\ -1 & 8 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$

Тогда

$$C^{-1} = (\mathcal{E}')^{-1} \mathcal{E} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & -6 & -8 & 11 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ -3 & -2 & -7 & 8 \\ -1 & 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 0 & 13 & -13 & 13 \\ -13 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \\ 13 & -13 & 13 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 - x_3 - x_4 \\ x'_2 = -x_1 + x_2 \\ x'_3 = x_4 \\ x'_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}.$

Задача 3.3. Пусть A – матрица линейного преобразования $\mathcal{A}$ в базисе $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ («старом»), A' – матрица этого преобразования в базисе $(\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n)$ («новом»). Тогда $A' = C^{-1}AC$.

- 1) Линейное преобразование $\mathcal{A}$ в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4)$ задается матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого преобразования в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_3, \bar{e}_2, \bar{e}_4)$.

Напомним, что C – матрица, у которой по столбцам стоят координаты «нового» базиса в «старом». В этом случае

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем C^{-1} .

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Получили, что в этом случае $C = C^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} A' = C^{-1}AC &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Обратите внимание на то, что мы получили следующий результат. Если в базисе поменять местами $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$, то в матрице линейного преобразования поменяются местами 2-я и 3-я строки и 2-й и 3-й столбцы.

$$\text{Ответ: } A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Линейное преобразование $\mathcal{A}$ в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4)$ задается матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого преобразования в базисе

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 + \bar{e}_4).$$

Напомним, что C – матрица, у которой по столбцам стоят координаты «нового» базиса в «старом». В этом случае

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем C^{-1} .

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} A' = C^{-1}AC &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

- 3) Линейное преобразование $\mathcal{A}$ в базисе $\bar{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1,0,0)$, $\bar{e}_3 = (0,0,1,0)$, $\bar{e}_4 = (0,0,0,1)$

задается матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого преобразования в базисе

$$\bar{e}'_1 = (1,1,0,0), \bar{e}'_2 = (1,0,1,0), \bar{e}'_3 = (1,0,0,1), \bar{e}'_4 = (-1,1,1,1).$$

Напомним, что C – матрица, у которой по столбцам стоят координаты «нового» базиса в «старом». В этом случае

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем C^{-1} .

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 4 & 4 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 4 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } C^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 A' &= C^{-1}AC = \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 6 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Обратите внимание на то, что в этом базисе матрица линейного преобразования является диагональной матрицей. В последствии мы к этому вернемся.

$$\text{Ответ: } A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$