

**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА**

ВЕКТОРЫ. МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ
(для студентов химических специальностей)

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2025

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций.

Предлагаемая Вашему вниманию серия пособий содержит описание курса лекций по линейной алгебре, многие годы читавшегося на общем потоке химического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Материал лекций, читавшихся в специальных группах, изложен в прекрасной книге: Михалёв А.А., Сабитов И.Х. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.: Издательский центр «Академия», 2013.

За долгое время содержание курса общего потока много раз уточнялось с учётом потребностей кафедр и опыта проведения сессий. Линейная алгебра, как и математический анализ, представляет собой дисциплину, ориентированную на решение многих задач, возникающих при исследовании математических моделей природных и социальных процессов. Роль математических методов при этом трудно переоценить. Бурное развитие вычислительной техники привело к тому, что многие задачи, относившиеся ранее к разряду чисто теоретических, явились основой алгоритмов, используемых при решении прикладных задач. Понимание принципов решения задач необходимо для успешной постановки этих задач и оценки полученных результатов. Поэтому целью этих пособий являлось описание ряда основных идей линейной алгебры. На основе опыта проведения сессий основной упор сделан на попытках объяснить, зачем вводится то или иное понятие, каковы его свойства, как производить соответствующие вычисления. Одним словом, основное внимание уделено идейной стороне; относительно меньшее внимание уделено технически сложным доказательствам. Иногда они просто опущены, иногда проведены в частном случае. При этом все основные идеи аккуратно описаны. Более того, приведены ссылки на доступные (и хорошо написанные) более подробные книги.

Пособия содержат небольшое количество примеров приложения методов линейной алгебры к моделям химических задач, достаточное для того, чтобы читатель мог поверить в полезность этой книги. Основной причиной этого является желание сделать пособия небольшими и удобными для подготовки к зачёту по линейной алгебре. Тем не менее, в них включены некоторые, не входящие в перечень вопросов зачёта, темы. Это относится

к ряду основных понятий высшей алгебры, таких, как поле, кольцо, идеал и т.п. Их знание необходимо для чтения многих книг, которые могут быть для Вас полезными в дальнейшем.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче ими экзаменов и зачётов.

Литература

- [1] А.Г. Курош. Курс высшей алгебры. – «Лань». – 2024
- [2] А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. Линейная алгебра и геометрия. – «Лань». – 2008
- [3] Б.П. Демидович, И.А. Марон. Основы вычислительной математики. – «Лань». – 2021
- [4] А.А. Михалёв, И.Х.Сабитов. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – «Юрайт». – 2018
- [5] В.А. Артамонов. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – «Дело». – 2021
- [6] В.А. Ильин , Э.Г. Позняк. Линейная алгебра. – «Проспект». – 2024
- [7] А.И. Мальцев. Основы линейной алгебры. – «Лань». – 2021
- [8] И.М. Гельфанд. Лекции по линейной алгебре. – «Наука». – 1971
- [9] В.В. Воеводин. Вычислительные основы линейной алгебры. – «Наука». – 1977
- [10] Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре. – «Наука». – 1972
- [11] И.В. Проскураков. Сборник задач по линейной алгебре. – «Наука». – 1978

1. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Системы линейных уравнений. Задачи, в которых они возникают

1.2. Матричная запись системы уравнений

1.2.1. Векторы-столбцы (и векторы-строки)

1.2.2. Матрицы. Краткая запись системы уравнений

1.2.3. Произведение матриц. Единичная матрица

1.3. Определитель матрицы

1.3.1. Определение определителя матрицы

1.3.2. Свойства определителя матрицы

1.4. Теорема Лапласа. Обратная матрица. Правило Крамера

1.4.1. Теорема Лапласа

1.4.2. Обратная матрица

1.4.3. Уравнения с матрицами

1.1. Системы линейных уравнений. Задачи, в которых они возникают

Системы линейных уравнений представляют собой математические модели многих актуальных задач естественных и социальных наук.

При изучении математических объектов принято задавать себе вопросы: какие интересующие нас задачи описывают рассматриваемые модели? Какими свойствами обладают эти объекты? Каковы алгоритмы произведения расчётов по этим моделям?

Полезность систем линейных уравнений сомнений не вызывает. Например, решая в школе задачи про окислительные-восстановительные реакции, Вы уже сталкивались с подобными системами уравнений. Приведём ещё примеры задач, имеющих отношение к химии, математическая модель которых приводит к системе линейных уравнений.

Пример 1. Расчет смесей

Пусть требуется приготовить смесь из m веществ, количество каждого равно b_j , $j = 1, \dots, m$. Для приготовления смеси имеется n компонент, каждая из которых содержит a_{ij} i -ого вещества, (j — номер компонента). Обозначим x_i — искомое количество i -ого вещества.

Тогда сформулированная задача примет вид системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Пример 2. Определение состава смеси спектрофотометрическими измерениями

Оптическая плотность раствора химического вещества определяется равенством

$$D = \log_{10} \left(\frac{I_0}{I} \right),$$

где I, I_0 — интенсивности светового потока до и после прохождения через раствор. Оптическая плотность связана с концентрацией поглощающего вещества и толщиной слоя l формулой

$$D(\lambda) = \varepsilon(\lambda)cl,$$

где $\varepsilon(\lambda)$ — молекулярный коэффициент поглощения, являющийся индивидуальной характеристикой вещества, зависящей от λ — длины волны, c — концентрация. Если смесь состоит из n невзаимодействующих веществ, то её оптическая плотность равна сумме оптических плотностей, составляющих её веществ,

$$D(\lambda) = \varepsilon_1(\lambda)c_1l + \dots + \varepsilon_n(\lambda)c_nl.$$

Если произвести измерения при $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_n$, то получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} D(\lambda_1) = \varepsilon_1(\lambda_1)c_1l + \dots + \varepsilon_n(\lambda_1)c_nl \\ \dots \\ D(\lambda_n) = \varepsilon_1(\lambda_n)c_1l + \dots + \varepsilon_n(\lambda_n)c_nl \end{cases}$$

относительно концентраций $c_1, \dots, c_n$.

В главе 1 будет доказано, что если определитель матрицы этой системы не равен 0, то система позволяет однозначно определить искомые величины $c_1, \dots, c_n$.

Пример 3. Исследование состава смеси при помощи сенсоров

Сенсорами называют приборы, выходной сигнал которых зависит от концентрации определенного вещества в газовой среде или в растворе, причем эти чувствительности известны и обозначаются a_{ij} (j – номер вещества, i – номер сенсора).

Предполагается, что сигналы, обусловленные присутствием в смеси каждого из веществ, складываются и что величина сигнала от определенного вещества пропорциональна концентрации, то есть x_j для j -го вещества, а коэффициентом пропорциональности является число a_{ij} (для i -го сенсора).

Таким образом,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Ниже будет доказано, что при $m = n$ и при условии $|A| \neq 0$ эта система позволяет однозначно определить числа $x_1, \dots, x_n$.

Нам предстоит развить интересную математическую теорию. Мы будем внимательно следить за переходом от поставленной задачи к последовательным этапам её решения, обсуждать предпринимаемые шаги, вводимые вспомогательные понятия и так далее. Этот процесс, делающий Вас «соучастником», очень полезен для повышения уровня математической культуры, необходимой для творческого применения Вами математических методов.

Изложение начнём... с цитаты из книги академика В.И. Арнольда «Динамика, статистика и проективная геометрия полей Галуа», МЦНМО, 2005.

Существует два основных способа ставить задачу: французский способ состоит в том, чтобы сформулировать вопрос наиболее общим образом, то есть так, чтобы его нельзя было бы далее обобщить без потери смысла, в то время как русский способ состоит в том, чтобы сформулировать его в том простейшем случае, который нельзя далее упростить, не лишив вопрос его основного содержания.

Начнём использовать французский способ. Что можно обобщать? Во многих реальных задачах количество переменных – неизвестное а priori число, которое мы обозначим n . В общем случае будем рассматривать линейные уравнения вида $a_1x_1 + \dots + a_nx_n - b = 0$. А сколько следует рассматривать уравнений? Если рассуждать «по-французски», то это – неизвестное заранее число, которое обозначим m . В итоге получаем систему уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1.1)$$

В этой системе $x_1, \dots, x_n$ – искомые величины, а числа $a_{11}, \dots, a_{mn}, b_1, \dots, b_m$ – заданные коэффициенты системы. Систему (1.1) общего вида мы и будем изучать в курсе линейной алгебры. В курсе аналитической геометрии числа m, n не больше 3. Это связано с тем, что точка с двумя координатами (x_1, x_2) – это точка плоскости, а точка с тремя координатами (x_1, x_2, x_3) – это точка пространства. Поэтому установленным свойствам решений системы можно дать наглядную геометрическую интерпретацию.

Впрочем, в изложении курса линейной алгебры будут рассматриваться объекты, которые хотя и не имеют непосредственной геометрической трактовки (например, точки $(x_1, \dots, x_n)$ пространства n измерений), но представляют собой обобщения интуитивно ясных, наглядных понятий.

Возвратимся к системе (1.1). На первый взгляд, её легко решить, последовательно исключая неизвестные (это – метод Гаусса). Решена ли наша задача? Кажется, решена. Указан способ, в принципе позволяющий исследовать любую систему такого вида. Но – встанем на позицию критика. Записать, при произвольных размерах системы, условие разрешимости этой системы и дать формулу для её решений – совсем не просто. Поэтому давайте продолжим наши рассуждения и постараемся понять, что же мы хотим получить?

Пришло время использовать русский подход (см. цитату выше) и максимально упростить систему (1.1), сведя её, при $m = n = 1$, к одному уравнению

$$ax = b. \quad (1.2)$$

Если $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$, или

$$x = a^{-1}b. \quad (1.3)$$

Если же $a = 0$, но $b \neq 0$, то уравнение (1.2) принимает вид $0 \cdot x = b$, а это уравнение не имеет решений. Если же $a = 0, b = 0$, то уравнение сводится к равенству $0 \cdot x = 0$, верному при любом x .

Поставим перед собой задачу записать систему (1.1) в виде, похожем на уравнение (1.2), а также получить для решений системы формулу, подобную равенству (1.3).

1.2. Матричная запись системы уравнений

1.2.1. Векторы-столбцы (и векторы-строки)

Начнём упрощать систему (1.1) произвольных размеров. Разные уравнения этой системы содержат одни и те же переменные $x_1, \dots, x_n$. Эти переменные можно рассматривать, как коэффициенты при новых объектах, которые мы будем называть векторами-столбцами и которые имеют вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Мы ввели в рассмотрение новые объекты и должны описать их простейшие свойства. Прежде всего следует выяснить, когда объекты

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

равны между собой? Будем считать, что векторы-столбцы $\bar{a}, \bar{b}$ (1.4) **равны между собой** тогда и только тогда, когда выполнены равенства $a_i = b_i$, $i = 1, \dots, m$.

Определим сумму векторов-столбцов (1.4) естественным образом:

$$\bar{a} + \bar{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_m + b_m \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Произведение числа α на вектор-столбец $\bar{a}$ определим равенством

$$\alpha \bar{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \dots \\ \alpha a_m \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Пример.

$$\text{Пусть } \bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тогда } \bar{a} + \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2+0 \\ 3-1 \\ 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$5 \cdot \bar{b} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 0 \\ 5 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Используя определения (1.5) и (1.6), легко проверить равенства:

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.
2. $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$.
3. $\bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a}$, где $\bar{0}$ – вектор-столбец, состоящий из m нулей.
4. Для любого вектора-столбца $\bar{a}$ существует единственный вектор-столбец $(-\bar{a})$, такой, что выполнено равенство $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$.
5. $\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$.
6. $(\alpha\beta)\bar{a} = \alpha(\beta\bar{a})$.
7. $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$.
8. $0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$.
9. $\alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

С учётом определений и установленных равенств, преобразуем систему (1.1) к уравнению

$$x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n = \bar{b}, \quad (1.7)$$

в котором

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \bar{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Определение. Выражение $x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n$ называется *линейной комбинацией* векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ с коэффициентами $x_1, \dots, x_n$.

Замечание. Таким образом, задача о возможности представить вектор $\bar{b}$ в виде линейной комбинации (1.7) векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ сводится к системе линейных уравнений (1.1).

Замечание. Точно так же, как векторы-столбцы, можно рассматривать и *векторы-строки* $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$, с аналогичными определениями равенства векторов, суммы векторов, произведения числа на вектор и с теми же самыми свойствами этих операций.

1.2.2. Матрицы. Краткая запись системы уравнений

Уравнение (1.7) пока ещё совсем не похоже на уравнение (1.2). Для того, чтобы добиться полного сходства, следует заменить набор чисел

$a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}$ каким-то одним объектом. Так как сама система (1.1) изображена в виде таблицы, естественно рассмотреть таблицу, составленную из коэффициентов системы, расположенных так же, как они расположены в системе:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Эта таблица называется **матрицей системы**. Эта матрица имеет m строк, строка с номером i представляет собой набор чисел $a_{i1}, \dots, a_{in}$, и n столбцов, перечисленных в (1.8). Будем говорить, что матрица **A имеет размер $m \times n$** (первый индекс всегда – номер строки, второй индекс – номер столбца).

Как и в предыдущем пункте, следует выяснить простейшие свойства новых объектов – матриц. Будем говорить, что матрица A размера $m \times n$ **равна** матрице B **такого же размера**

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

тогда и только тогда, когда для всех $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ выполнены равенства $a_{ij} = b_{ij}$. Отметим, что говорить о равенстве матриц, имеющих различные размеры, лишено смысла.

Определим сумму матриц (1.9) и (1.10) одинакового размера равенством

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

и произведение числа α на матрицу (1.9) равенством

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Используя равенства (1.11) и (1.12), легко установить, что операции над матрицами обладают теми же свойствами, что и операции над векторами:

1. $A + B = B + A$.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A$, где $\mathbf{0}$ – нулевая матрица размера $m \times n$, то есть

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Для любой матрицы A (1.9) существует матрица $(-A)$, такая, что $A + (-A) = \mathbf{0}$,

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

6. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

7. $1 \cdot A = A$.

8. $0 \cdot A = \mathbf{0}$ (в левой части равенства символ 0 обозначает число ноль, а в правой его части символ $\mathbf{0}$ обозначает нулевую матрицу)

9. $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ (и в левой, и в правой части равенства символ $\mathbf{0}$ обозначает нулевую матрицу).

Использование похожих символов 0 и $\mathbf{0}$ для обозначения разных объектов, как правило, не вызывает недоразумений. Там, где это будет необходимо, будет специально оговорено, что означает символ 0 .

Введённые операции пока не позволяют получить для системы (1.1) краткую запись, подобную (1.2).

Определим операцию умножения матрицы A размера $m \times n$ на вектор-столбец $\bar{x}$ с координатами $x_1, \dots, x_n$ равенством

$$A\bar{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Результатом этой операции является вектор-столбец с m координатами. Тогда, ввиду определения равенства векторов, система (1.1) равносильна равенству векторов-столбцов, имеющему вид

$$A\bar{x} = \bar{b}. \quad (1.14)$$

Уравнение (1.14) вполне похоже на уравнение (1.1).

Таким образом, часть поставленной задачи успешно решена.

1.2.3. Произведение матриц. Единичная матрица

Рассмотренную в предыдущем пункте операцию умножения матрицы на вектор легко обобщить и определить *произведение матрицы размера $m \times n$ на матрицу размера $n \times l$* . Пусть матрица A имеет вид (1.9), матрица B равна

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix}.$$

Определим их произведение AB , как матрицу C размера $m \times l$, элементы которой определяются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{in} b_{nj}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, l. \quad (1.15)$$

Это равенство означает, что столбец с номером j матрицы AB представляет собой произведение матрицы A на столбец с номером j матрицы B .

Важно, что матрицу A можно умножить на матрицу B , только если количество столбцов матрицы A совпадает с количеством строк матрицы B . В частности матрицу размера 13×15 нельзя умножить на матрицу размера 7×15 , но можно умножить на матрицу размера 15×7 .

Операция произведения матриц обладает свойствами:

1. $A(BC) = (AB)C$, если A имеет размер $m \times l$, B имеет размер $l \times k$, C имеет размер $k \times n$.
2. $A(B + C) = AB + AC$, если A имеет размер $m \times l$, B, C имеют размер $l \times n$.

Равенство $AB = BA$ в общем случае неверно. Например, если A имеет размер $m \times l$, B имеет размер $l \times k$ и $k \neq m$, то матрица BA просто не определена. Например, если матрица A имеет размер 13×15 , B имеет размер 15×7 , то произведение AB определено, а произведение BA матриц размера 15×7 и 13×15 не определено. Если же определены оба произведения AB и BA , и выполнено равенство $AB = BA$, то говорят, что матрицы A и B **коммутируют**.

Напомним, что действительное число 1 обладает тем свойством, что для любого числа a справедливы равенства $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. По аналогии, следует определить **единичную матрицу E** как матрицу, для которой для любой матрицы A выполнены равенства $AE = EA = A$. Однако, если A имеет размер $m \times l$, $l \neq m$, то эти равенства невозможны ни для какой матрицы E . Действительно, если определена матрица AE и $AE = A$, то матрица E должна иметь

размер $l \times l$, если определена матрица EA и $EA = A$ то матрица E должна иметь размер $t \times t$ и равенство $AE = EA = A$ невозможно. Таким образом, пусть мы рассматриваем далее **квадратные матрицы размера $n \times n$** .

Назовём единичной матрицей размера $n \times n$ матрицу

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

у которой на главной диагонали стоят 1, а все остальные элементы равны 0. Из равенства (1.15) сразу следует, что для любой матрицы A вида (1.9) размера $n \times n$ выполнено требуемое равенство $AE = EA = A$.

Напомним, что для действительного числа $a \neq 0$ существует число a^{-1} такое, что $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$. По аналогии, определим для квадратной матрицы A **обратную матрицу A^{-1}** условием $A^{-1}A = AA^{-1} = E$. Вопрос, при каких условиях обратная матрица существует, будет подробно рассмотрен позже. Отметим лишь, забегая вперёд, что условию $a \neq 0$, необходимому и достаточному для существования числа a^{-1} , соответствует условие отличия от нуля определителя рассматриваемой матрицы. Что такое определитель матрицы, будет рассказано далее.

Задача 1. Вычислить сумму матриц A и B .

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что все элементы матрицы $A + B$ делятся на 2. Поэтому матрицу $A + B$ можно записать в виде

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -9 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & -3+8 & 7-9 \\ 5-4 & 6+2 & -2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -7 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -4 & -7 \\ -12 & -18 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+8 & 2+10 \\ -7-4 & 5-7 \\ 1-12 & -3-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ -11 & -2 \\ -11 & -21 \end{pmatrix}$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -9 \\ -13 & -6 & 4 \\ -7 & -7 & -7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -6 \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 5-5 & -3-5 & -9-6 \\ -13+3 & -6+2 & 4-5 \\ -7+2 & -7+3 & -7+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 & -15 \\ -10 & -4 & -1 \\ -5 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что все элементы матрицы делятся на (-1) . Поэтому матрицу $A + B$ можно записать в виде

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -8 & -15 \\ -10 & -4 & -1 \\ -5 & -4 & -3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 8 & 15 \\ 10 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 15 & -3 & -9 \\ -13 & -8 & 4 \\ -7 & -9 & -7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -15 & -6 & -6 \\ 4 & 2 & -7 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 15-15 & -3-6 & -9-6 \\ -13+4 & -8+2 & 4-7 \\ -7+1 & -9+3 & -7+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -9 & -15 \\ -9 & -6 & -3 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что все элементы матрицы делятся на (-3) . Поэтому матрицу $A + B$ можно записать в виде

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -9 & -15 \\ -9 & -6 & -3 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Еще раз отметим, что сложить, например, матрицы

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 4 & -7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ невозможно. **Сложение матриц определено только для матриц одинакового размера.**

Напомним, что при умножении матрицы A размера $m \times l$, на матрицу B размера $l \times k$ получается матрица C размера $m \times k$, причем, элемент c_{ij} является суммой произведений элементов i -й строки матрицы A на элементы j -го столбца матрицы B .

Задача 2. Вычислить произведение матриц A и B .

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

При умножении матрицы A размера 2×2 , на матрицу B размера 2×2 получается матрица AB размера 2×2 .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

При умножении матрицы A размера 2×2 , на матрицу B размера 2×2 получается матрица AB размера 2×2 .

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 - 2 \cdot 2 & 2 \cdot 6 - 2 \cdot 3 \\ -1 \cdot 5 + 4 \cdot 2 & -1 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -7 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

При умножении матрицы A размера 2×3 , на матрицу B размера 3×2 получается матрица AB размера 2×2 .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -7 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 - 3 \cdot (-7) + 7 \cdot 1 & 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 + 7 \cdot (-3) \\ 5 \cdot 3 + 6 \cdot (-7) - 2 \cdot 1 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 3 + 21 + 7 & 2 - 15 - 21 \\ 15 - 42 - 2 & 10 + 30 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & -34 \\ -29 & 46 \end{pmatrix}.$$

$$4) A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -6 \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

При умножении матрицы A размера 3×3 , на матрицу B размера 3×1 получается матрица AB размера 3×1 .

$$AB = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -6 \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 5 - 12 \\ 3 - 2 - 10 \\ 2 - 3 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$5) A = (1 \quad -2 \quad 1), B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

При умножении матрицы A размера 1×3 , на матрицу B размера 3×2 получается матрица AB размера 1×2 .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (3 - 4 + 1 \quad 0 - 10 + 4) = (0 \quad -6).$$

6) Вычислить A^n , где $n = 2, n = 3$, $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi + \cos \varphi \sin \varphi & -\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\varphi \cos \varphi - \sin 2\varphi \sin \varphi & -\cos 2\varphi \sin \varphi - \sin 2\varphi \cos \varphi \\ \sin 2\varphi \cos \varphi + \cos 2\varphi \sin \varphi & -\sin 2\varphi \sin \varphi + \cos 2\varphi \cos \varphi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos 3\varphi & -\sin 3\varphi \\ \sin 3\varphi & \cos 3\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7) Вычислить A^n , где $n \in \mathbb{N}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Возникает предположение, что $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, которое нужно доказать методом математической индукции.

Действительно, при $n = 1$ получаем, что $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пусть это утверждение верно при $n = k$, то есть $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Покажем, что оно будет верно при $n = k + 1$.

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Утверждение доказано.

Замечание. Еще раз отметим, что перемножить, например, матрицы

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 4 & -7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ невозможно. **Произведение двух матриц возможно, только если количество столбцов первого множителя совпадает с количеством строк второго множителя.**

8) То, что произведение даже квадратных матриц некоммутативно в общем случае, достаточно проверить на одном примере. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}. \text{ Тогда}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix},$$

в то время, как

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

1.3. Определитель матрицы

1.3.1. Определение определителя матрицы

Как правило, формальное определение определителя матрицы вызывает некоторое недоумение: откуда взялась такая конструкция? Мы попытаемся прийти к этому понятию «русским методом» (см. цитату выше). Для уравнения

$$ax = b,$$

при условии $a \neq 0$, получаем $x = \frac{b}{a}$, что можно записать в виде

$$x = a^{-1}b.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_{12} = b_2. \end{cases} \quad (1.17)$$

Умножим первое уравнение на число a_{22} , а второе уравнение на число a_{12} , получим следствие исходной системы

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_{12} = b_1a_{22} \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_{12} = b_2a_{12} \end{cases}$$

и, вычитая из первого из этих уравнений второе, находим

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \quad (1.18)$$

Если число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, то из (1.18) находим

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (1.19)$$

Подставляя найденное значение x_1 (1.19) в любое из уравнений (1.17), найдём x_2 . Система (1.17) получит единственное решение. Обратите внимание на сходство условий $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ для уравнения (1.18) и условия

$a \neq 0$ для уравнения (1.2). Величину $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ назовём **определителем матрицы**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

системы (1.17). Действительно, эта величина определяет, будет ли решение системы существовать и будет ли оно единственным.

Определитель матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

представляет собой число

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (1.20)$$

Если у Вас хватит терпения (!), то Вы можете убедиться в том, что если решать систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

аналогично решению системы (1.17), последовательно исключая неизвестные, то коэффициент при последнем оставшемся неизвестном как раз будет равен $|A|$.

Для описания законов образования формул (1.18) и (1.19) и дальнейшего обобщения сделаем такое наблюдение. В формуле (1.18) есть два слагаемых, одно со знаком плюс, другое со знаком минус. При этом каждое слагаемое является произведением чисел вида $a_{1i}a_{2j}$, где одно из чисел i, j равно 1, а другое равно 2. Это означает, что в произведении $a_{1i}a_{2j}$, участвуют элементы любой строки и любого столбца (как первые номера, так и вторые принимают оба значения 1 и 2). Если мы посмотрим на равенство (1.20), то заметим, что каждое из 6 произведений, стоящих в правой части (1.20), содержит элементы каждой строки и каждого столбца. При этом в каждом таком произведении первые индексы сомножителей – это числа 1, 2, 3, а вторые числа – это те же самые цифры, но в некотором другом порядке. Это наводит на мысль определить понятие **перестановки** чисел 1, 2, ..., n . Перестановка представляет собой те же числа, но взятые, возможно, в некотором другом порядке (воз-

можно, и в том же самом). Очевидно, что существует $n!$ различных перестановок чисел $1, 2, \dots, n$. (Действительно, на первое можно подставить любое из n чисел, то есть имеем n возможностей. При выбранном первом числе, на второе место можно выбрать одно из $n - 1$ оставшихся чисел, то есть имеем $n(n - 1)$ возможностей выбора первых двух чисел. Продолжим эти рассуждения, получаем $n(n - 1) \dots \times 2 \times 1 = n!$ возможных перестановок, что и утверждалось).

Определение. Пусть $a_1, \dots, a_n$ какая-то перестановка чисел $1, 2, \dots, n$. Назовем пару чисел (a_i, a_j) **инверсией**, если $a_i > a_j$, но $i < j$.

Определение. Перестановку назовем **четной**, если число инверсий в ней четное, и **нечетной** в противном случае.

Например, $1, 3, 2, 4, 6, 5$ – четная перестановка чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6$ (инверсии $(3, 2)$ и $(6, 5)$), $1, 4, 5, 2, 6, 3$ – нечетная (инверсии $(4, 2)$, $(5, 2)$ и $(6, 3)$).

Каждую перестановку $a_1, \dots, a_n$ можно рассматривать, как отображение σ множества чисел $1, 2, \dots, n$ на множество чисел $1, 2, \dots, n$, определенное равенством:

$$\sigma(i) = a_i \quad (1.21)$$

Отображение (1.21) удобно задавать матрицей $2 \times n$ вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Будем считать **по определению** величину $(-1)^{\text{четность } \sigma}$ числом 1 , если σ – четная подстановка, и числом -1 , если σ – нечетная подстановка.

Выражение (1.18) есть сумма двух слагаемых. Эти слагаемые – произведения чисел вида a_{ij} , $i, j = 1, 2$.

Рассмотрим первое слагаемое: $a_{11}a_{22}$. У него вторые индексы сомножителей совпадают с первыми. Если расположить первые индексы в первой строке матрицы, а вторые ее индексы – во второй строке, то получим матрицу вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

соответствующую перестановке, оставляющей все числа на своих местах, и эта перестановка четная (нет инверсий).

Второму слагаемому $a_{12}a_{21}$ сопоставим матрицу перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

(еще раз напомним, что в первой строке стоят первые индексы сомножителей, во второй строке – вторые).

Перестановка (1.22) – нечетная (в ней 1 инверсия). Таким образом, величина (1.18) представляет собой сумму слагаемых вида

$$(-1)^{\text{четность } \sigma} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)},$$

взятую по всевозможным перестановкам чисел 1, 2 (этих перестановок ровно две). Аналогично, выражение (1.20) есть сумма слагаемых вида

$$(-1)^{\text{четность } \sigma} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)}$$

Например, слагаемому $a_{13} a_{21} a_{32}$

соответствует перестановка: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Это – четная перестановка (2 инверсии: (3,1) и (3,2))

Слагаемому $-a_{12} a_{21} a_{33}$ соответствует перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Это – нечетная перестановка (1 инверсия: (2,1))

Проверка остальных слагаемых труда не составит, и Вы сделаете ее самостоятельно в качестве полезного упражнения.

Сделанные наблюдения позволяют нам дать общее

Определение. *Определитель матрицы A размера $(n \times n)$ равен*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\text{четность } \sigma} a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}, \quad (1.23)$$

где суммирование в правой части (1.23) произведено по всем перестановкам чисел 1, ..., n (так что правая часть содержит $n!$ слагаемых).

1.3.2. Свойства определителя матрицы

Определение. Если матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

то *транспонированной матрицей A^T* называется матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Можно сказать, что транспонирование квадратной матрицы состоит в замене ее строк столбцами (или, разумеется, наоборот). Можно сказать также, что транспонированная матрица получается из исходной симметрией относительно главной диагонали.

Свойство 1.

$$|A| = |A^T|. \quad (1.24)$$

► Член определителя матрицы A^T , соответствующий члену $a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$ определителя $|A|$, имеет вид $a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$ имеет ту же чётность перестановки. ◀

Здесь и далее символы ► и ◀ означают начало и конец доказательства, соответственно.

Замечание: Равенство (1.24) позволяет нам утверждать, что все свойства определителя, доказанные для его строк, окажутся верными и для его столбцов и наоборот. Поэтому в дальнейшем свойства формулируются для строк.

Свойство 2. Если определитель имеет строку, состоящую из нулей, то он равен 0.

► По формуле (1.23), все члены определителя равны 0. ◀

Свойство 3. Если один определитель получается из другого перестановкой двух строк, то он равен исходному определителю, взятому с противоположным знаком.

► При упомянутом выше действии происходит смена знака у всех слагаемых в правой части равенства (1.23), значит, сменит знак и весь определитель. ◀

Свойство 4. Если определитель содержит две одинаковые строки, то он равен 0.

► Действительно, при перестановке одинаковых строк определитель, с одной стороны, не изменится, так как строки одинаковые. С другой стороны, он сменит знак по свойству 3. Таким образом, $|A| = -|A|$, откуда $|A| = 0$. ◀

Свойство 5. При умножении всех элементов одной и той же строки на число $\alpha \in \mathbb{R}$ определитель матрицы умножится на число α .

► Все слагаемые в правой части равенства (1.23) будут иметь общий множитель α . ◀

В частности, если все элементы какого-либо столбца (или строки) определителя делятся на число α , то это число можно вынести как общий множитель из определителя, поделив все элементы столбца (строки) на α .

Свойство 6. Определитель с двумя пропорциональными строками равен 0.

► Сразу следует из свойств 4 и 6. ◀

Свойство 7. Если элементы i -ой строки определителя представлены в виде

$$a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}, j = 1, \dots, n, \text{ то}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a'_{i1} & \dots & a'_{in} \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a''_{i1} & \dots & a''_{in} \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

► Член определителя (1.23) принимает вид

$$a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} = a'_{1\sigma(1)} \dots a'_{i\sigma(i)} \dots a'_{n\sigma(n)} + a''_{1\sigma(1)} \dots a''_{i\sigma(i)} \dots a''_{n\sigma(n)}$$

и доказываемое равенство справедливо ввиду равенства (1.23), примененного ко всем определителям, содержащимся в доказываемом равенстве. ◀

Свойство 8. Если одна из строк определителя есть линейная комбинация его других строк, то определитель равен 0.

Замечание. Позже мы установим, что это утверждение представляет собой необходимое и достаточное условие равенства определителя нулю.

► Если, например, i -я строка есть линейная комбинация остальных строк, то по свойству 7 исходный определитель равен сумме определителей, имеющих пропорциональные строки, и он равен нулю по свойству 6. ◀

Свойство 9. Определитель не меняется, если к любой его строке прибавить линейную комбинацию других его строк.

► Применим свойство 7 и 8. ◀

Задача 3. Вычислить определители матриц второго порядка.

$$1) \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 - (-5) \cdot 4 = -2 + 20 = 18$$

$$2) \begin{vmatrix} 17 & 8 \\ 21 & 6 \end{vmatrix} = 17 \cdot 6 - 21 \cdot 8 = 102 - 168 = -66$$

$$3) \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = \\ = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$$

$$4) \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot (-\sin \alpha) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$5) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta = \sin(\alpha - \beta)$$

$$6) \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} = a^2 \cdot b^2 - ab \cdot ab = 0$$

$$7) \begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - \log_b a \cdot \log_a b = 1 - 1 = 0$$

$$8) \text{ Решить уравнение } \begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x(x+1) - (-4)(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x+1) = 0 \\ \Leftrightarrow x = -4 \vee x = -1.$$

Напомним, что символ $A \Leftrightarrow B$ означает, что задачи A и B равносильны (эквивалентны), то есть множества корней этих задач одинаковы. В частности, это может означать, что обе задачи одновременно не имеют корней.

Задача 4. Вычислить определители матриц третьего порядка.

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - \\ - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 9 - 8 \cdot 6 \cdot 1 = 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0$$

$$2) \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 \cdot 8 + 4 \cdot (-2) \cdot 2 + 8 \cdot (-1) \cdot (-5) - \\ - 2 \cdot 7 \cdot (-5) - 8 \cdot 4 \cdot 8 - (-1) \cdot (-2) \cdot 3 = \\ = 168 - 16 + 40 + 70 - 256 - 6 = 0$$

$$3) \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) \cdot (-5) + (-3) \cdot 8 \cdot 1 + 3 \cdot (-7) \cdot 5 - \\ - 1 \cdot (-2) \cdot 5 - 3 \cdot (-3) \cdot (-5) - (-7) \cdot 8 \cdot 4 = \\ = 40 - 24 - 105 + 10 - 45 + 224 = 100$$

$$4) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-2) \cdot 5 + 4 \cdot 2 \cdot (-4) - \\ - 5 \cdot 1 \cdot (-4) - 4 \cdot 2 \cdot (-3) - 2 \cdot (-2) \cdot 3 = \\ = -9 - 20 - 32 + 20 + 24 + 12 = -5.$$

Этот определитель можно посчитать по-другому. Согласно свойству 5 можно вынести из последнего столбца общий множитель (-1) и получить, что

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \\ = -(9 + 20 + 32 - 20 - 24 - 12) = -(5) = -5$$

5) Вычислите самостоятельно и получите, что

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 40 \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

6) Решить уравнение $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (-1) \cdot 1 + x \cdot 3 \cdot (x+10) + 2 \cdot 1 \cdot (-x) - \\ - (x+10) \cdot (-1) \cdot (-x) - 2 \cdot x \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 3 = 0 \\ \Leftrightarrow -3 + 3x^2 + 30x - 2x - x^2 - 10x - 2x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 16x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \pm \sqrt{16 + 6} = -4 \pm \sqrt{22}.$$

Напомним, что корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ можно найти по формуле (если дискриминант $D = b^2 - 4ac \geq 0$)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

В случае, когда уравнение имеет вид $x^2 + bx + c = 0$ и коэффициент b «хорошо делится» на 2, полезно использовать формулу

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}$$

(мы использовали именно эту формулу).

7) Решить неравенство $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0.$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0 \Leftrightarrow 3 \cdot x \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 1 -$$

$$-(-1) \cdot x \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \cdot 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow -3x - 4 + 2 + x - 2 + 12 < 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 8 < 0$$

$$\Leftrightarrow x > 4.$$

Задача 5. Транспонировать матрицу.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & x+10 \\ x & -1 & 1 \\ -x & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4. Теорема Лапласа. Обратная матрица. Правило Крамера

1.4.1. Теорема Лапласа

Сопоставим элементу a_{ij} квадратной матрицы A определитель матрицы полученной из матрицы A вычеркиванием всей строки с номером i и всего столбца с номером j .

Определение. Полученный определитель $(n - 1)$ -го порядка назовем **минором** M_{ij} . Величину $(-1)^{i+j} M_{ij}$ назовем **алгебраическим дополнением** элемента a_{ij} и обозначим A_{ij} .

Задача 4. Найти все миноры и алгебраические дополнения матрицы A .

$$1) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{ll} M_{11} = 6 & A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 6 \\ M_{12} = 5 & A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -5 \\ M_{21} = 4 & A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -4 \\ M_{22} = 3 & A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 3. \end{array}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{ll} M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3 & A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = -3 \\ M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 42 = -6 & A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = 6 \\ M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 35 = -3 & A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = -3 \\ M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 24 = -6 & A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = 6 \\ M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 21 = -12 & A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = -12 \\ M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6 & A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = 6 \\ M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3 & A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = -3 \\ M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6 & A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = 6 \\ M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 & A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = -3 \end{array}$$

Имеет место важная теорема Лапласа о разложении определителя по строке.

Теорема 1.1. (Лапласа). Для любого $i, i = 1, \dots, n$ выполняется равенство:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (1.25)$$

Замечание. Разумеется, верна и теорема о разложении определителя по столбцу, утверждающая, что для любого j , $j = 1, \dots, n$ выполняется равенство:

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (1.26)$$

► Для упрощения выкладок докажем эту теорему для $n = 3$. Рассмотрим определитель $|A|$ и произведём группировку его членов

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Сделаем решающее наблюдение. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, & a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Определители, стоящие в правых частях равенств (1.28), получаются из исходного определителя удалением, соответственно, элементов первой строки и первого столбца, элементов первой строки и второго столбца, элементов первой строки и третьего столбца. Таким образом, это – миноры исходной матрицы. Равенство (1.27) и (1.28) означают, что

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}. \quad (1.29)$$

Вспоминая определение алгебраического дополнения, перепишем это равенство в виде

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \quad (1.30)$$

Точно так же можно получить формулы:

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}. \quad (1.31)$$

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}. \quad (1.32)$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}. \quad (1.33)$$

$$|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}. \quad (1.34)$$

$$|A| = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}. \quad (1.35)$$

В общем случае ограничимся схемой доказательства. В равенстве (1.23) можно сгруппировать все слагаемые, содержащие a_{ij} при фиксированных i, j . Остается заметить, что коэффициентом при a_{ij} будет сумма слагаемых, представляющих собой как раз определитель A_{ij} . Зафиксировав i и рассматривая все $j = 1, \dots, n$ мы представим правую часть равенства (1.23) как раз в виде:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}.$$

То есть равенство (1.25) (а вместе с ним и (1.26)–(1.35)) установлены. ◀

Эта теорема имеет важное дополнение.

Теорема 1.2. Если $i \neq k$, то

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{kj} = 0 \quad (1.36)$$

Аналогично, если $j \neq l$, то

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}A_{il} = 0 \quad (1.37)$$

► Выражение, стоящее в левой части доказываемого равенства, представляет собой разложение по строке с номером k определителя, полученного из исходного определителя заменой k –той строки на строку с номером i . Этот определитель содержит две одинаковые строки, поэтому он равен 0. ◀

Задача 5. Вычислить определители, раскладывая их по какой-то строке или по какому-то столбцу.

1) Вычислить $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, раскладывая по 1-ой строке.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (+1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (+1) \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \\ = 1 \cdot (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

2) Вычислить $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$, раскладывая по 2-й строке.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} + (+1) \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + \\
+ (-1) \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\
= -8(32 - 5) + 7(24 + 10) + 2(-3 - 8) = -216 + 238 - 22 = 0.$$

3) Вычислить $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$, раскладывая по 1-му столбцу.

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} = (+1) \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} + \\
+ (+1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 4(10 + 56) - 3(15 + 35) + (-24 + 10) = \\
= 4 \cdot 66 - 3 \cdot 50 + 1 = 264 - 150 - 14 = 100.$$

4) Вычислить $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$, раскладывая по 3-му столбцу.

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} = (+1) \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} + \\
+ (+1) \cdot (-5) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = \\
= 5(-21 + 2) - 8(-28 + 3) - 5(-8 + 9) = -95 + 200 - 5 = 100.$$

5) Вычислить $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$, раскладывая по 2-му столбцу.

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + (+1) \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + \\
+ (-1) \cdot (-7) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = \\
= 3(-15 - 8) - 2(-20 - 5) + 7(32 - 15) = -69 + 50 + 119 = 100.$$

1.4.2. Обратная матрица

Сначала сформулируем важное свойство определителей:

$$|AB| = |A||B|. \quad (1.38)$$

Доказательство этого свойства для матриц размера 2×2 и 3×3 — прекрасное упражнение для самостоятельной работы. Оно состоит в непосредственной проверке равенства (1.38), используя определение произведения матриц и свойства определителей.

Задача 6. Проверьте, что действительно $|AB| = |A||B|$. Ограничимся в этой задаче совсем простыми примерами.

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Мы уже получили раньше, что } AB = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 42 = -2$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{vmatrix} = 950 - 946 = 4.$$

$$\text{Действительно, } |AB| = |A||B|.$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Мы уже получили раньше, что } AB = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 18 = 18.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 2 = 6.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 12 = 3.$$

$$\text{Действительно, } |AB| = |A||B|.$$

Для матриц произвольного размера оно доказано в учебниках по линейной алгебре (например, в учебнике А.Г. Курош, Курс высшей алгебры, любое из многочисленных переизданий). Доказательство носит технический характер, поэтому здесь мы его не приводим.

Напомним, что матрица A^{-1} является обратной для матрицы A , если выполнены равенства

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \quad (1.39)$$

Из равенств (1.39) следует, что обратную матрицу может иметь только квадратная матрица. Более того, не всякая квадратная матрица имеет обратную матрицу. Вопрос о существовании обратной матрицы и служит темой

этого пункта. Отметим, что из равенств (1.38), (1.39) и очевидного равенства $|E| = 1$ следует, что

$$1 = |E| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}|. \quad (1.40)$$

Из (1.40) следует, что $|A| \neq 0$, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$. Таким образом, условие $|A| \neq 0$ является необходимым условием существования обратной матрицы. Следующая теорема означает, что это условие является необходимым и достаточным для существования обратной матрицы.

Теорема 1.3. Если $|A| \neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу. При этом

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

где A_{ij} обозначают алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A .

► Для простоты выкладок рассмотрим случай матрицы размера 3×3 . Докажем, что матрица

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.42)$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} , является обратной матрицей для матрицы A . Для этого умножим матрицу (1.42) на матрицу A :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \\ & = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} & a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} & a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} \\ a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} & a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} & a_{13}A_{12} + a_{23}A_{22} + a_{33}A_{32} \\ a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33} & a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{32}A_{33} & a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и используем равенства (1.30) – (1.32), (1.36), согласно которым матрица, стоящая в правой части равенства равна

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать. Проверка равенства

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

проводится вполне аналогично, с использованием равенств (1.33) – (1.35) и (1.37).

Таким образом, равенства (1.39) выполнены для матрицы (1.42) и, таким образом, эта матрица является обратной для матрицы A . ◀

Итак, мы можем сформулировать **план действий** при нахождении обратной матрицы для матрицы A .

- 1) Считаем $|A|$. Все дальнейшие действия выполняются, только если $|A| \neq 0$. **Если $|A| = 0$, то обратная матрица не существует.**
- 2) Считаем M_{ij} и затем A_{ij} .
- 3) Из элементов A_{ij} составляем матрицу $\tilde{A}$ и затем находим матрицу $\tilde{A}^T$.
- 4) Находим $\frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T = A^{-1}$.

Задача 6.1. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

- 1) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 20 = -2 \neq 0$, следовательно, обратная матрица существует.
- 2) $M_{11} = 6$ $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 6$
 $M_{12} = 5$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -5$
 $M_{21} = 4$ $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -4$
 $M_{22} = 3$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 3$.
- 3) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$
 $\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$
- 4) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Некоторые задачи, к счастью, позволяют сделать проверку правильности решения. В нашем случае достаточно убедиться, что $AA^{-1} = E$:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -18 + 20 & 12 - 12 \\ -30 + 30 & 20 - 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Задача 6.2. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$.

1) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1 \neq 0$, следовательно, обратная матрица существует.

$$\begin{aligned} 2) \quad M_{11} &= 8 & A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 8 \\ M_{12} &= -5 & A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = 5 \\ M_{21} &= -3 & A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = 3 \\ M_{22} &= 2 & A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \tilde{A} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \tilde{A}^T &= \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$4) \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T = 1 \cdot \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сделаем, на всякий случай, проверку (это действие, конечно, не является обязательным)

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 - 15 & 6 - 6 \\ -40 + 40 & -15 + 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Задача 6.3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

1) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 90 + 84 + 96 - 105 - 96 - 72 = -3 \neq 0$, следовательно, обратная матрица существует.

$$\begin{aligned} 2) \quad M_{11} &= \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3 & A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = -3 \\ M_{12} &= \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 42 = -6 & A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = 6 \\ M_{13} &= \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 35 = -3 & A_{13} &= (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = -3 \\ M_{21} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 24 = -6 & A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = 6 \\ M_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 21 = -3 & A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = -3 \\ M_{23} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 14 = 2 & A_{23} &= (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -2 \\ M_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3 & A_{31} &= (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = -3 \\ M_{32} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0 & A_{32} &= (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = 0 \\ M_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 8 = 2 & A_{33} &= (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = 2 \end{aligned}$$

$$3) \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3) A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Мы умножаем элементы матрицы на (-1) , чтобы уменьшить количество минусов в записи элементов матрицы, и не умножаем на $\frac{1}{3}$ потому, что «дробные» элементы матрицы воспринимаются сложнее.

Снова сделаем проверку:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 - 12 + 9 & -12 + 6 + 6 & 6 + 0 - 6 \\ 12 - 30 + 18 & -24 + 15 + 12 & 12 + 0 - 12 \\ 21 - 48 + 27 & -42 + 24 + 18 & 21 + 0 - 18 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Задача 6.4. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

$$1) |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 30 + 18 + 8 - 15 - 36 - 8 = -3 \neq 0, \text{ следова-}$$

тельно, обратная матрица существует.

$$2) M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2 \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = -2$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = 5$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 15 = -7 \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = -7$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = 0$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 3$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 6 = 6 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -6$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = 1$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -7$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 4 = 11 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = 11$$

$$3) \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -7 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & -7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -7 \\ -7 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

$$4) A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -7 \\ -7 & -6 & 11 \end{pmatrix}.$$

Снова сделаем проверку:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -7 \\ -7 & -6 & 11 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -7 \\ -7 & -6 & 11 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 + 10 - 7 & 0 + 6 - 6 & 3 - 14 + 11 \\ -4 + 25 - 21 & 0 + 15 - 18 & 2 - 35 + 33 \\ -6 + 20 - 14 & 0 + 12 - 12 & 3 - 28 + 22 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

1.4.3. Уравнения с матрицами

Напомним, что произведение матриц, вообще говоря, не коммутативно. Иногда можно получить произведение матриц AB , но нельзя получить произведение BA , но даже если матрицы A и B – квадратные, произведение AB не обязано равняться произведению BA .

Рассмотрим уравнение $AX = B$, где A и B – известные матрицы, а X – неизвестная матрица, которую нужно найти. Предположим, что существует матрица A^{-1} . Умножим равенство $AX = B$ *слева* на матрицу A^{-1} , получим $A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow EX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

Не забываем, что $AE = EA = A$.

Важное замечание. Умножение равенства $AX = B$ *справа* на матрицу A^{-1} *к успеху не приведет*, так как мы получим

$$AXA^{-1} = BA^{-1}.$$

Но поскольку произведение произвольных матриц некоммукативно, то мы не сможем в левой части равенства поменять множители местами и получить в левой части уравнения только неизвестную матрицу X .

Задача 7.1. Найти неизвестную матрицу X из уравнения

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Введем обозначения: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A$ и $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = B$.

Тогда уравнение перепишется в виде: $AX = B$.

Если матрица A^{-1} существует, умножим равенство

$$AX = B$$

слева на A^{-1} и получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow EX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Попробуем найти A^{-1} .

$$1) |A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0, \text{ поэтому обратная матрица существует.}$$

$$2) M_{11} = 3 \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 3$$

$$M_{12} = 1 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1$$

$$M_{21} = 5 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -5$$

$$M_{22} = 2 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 2.$$

$$3) \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4) A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 10 & -18 - 5 \\ -4 + 4 & 6 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } X = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 7.2. Найти неизвестную матрицу X из уравнения

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Введем обозначения: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A$, $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = B$ и $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = C$.

Тогда уравнение переписывается в виде $AXB = C$. Предположим, что существуют матрицы A^{-1} и B^{-1} . Умножим равенство

$$AXB = C$$

слева на A^{-1} и получим

$$A^{-1}AXB = A^{-1}C \Leftrightarrow EXB = A^{-1}C \Leftrightarrow XB = A^{-1}C.$$

Теперь полученное равенство умножим *справа* на B^{-1} , получим

$$XBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \Leftrightarrow XE = A^{-1}CB^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Откуда получаем, что $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Попробуем найти A^{-1} .

$$1) |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0, \text{ поэтому обратная матрица существует.}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad M_{11} &= 2 & A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 2 \\ M_{12} &= 3 & A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -3 \\ M_{21} &= 1 & A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -1 \\ M_{22} &= 2 & A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 2. \end{aligned}$$

$$3) \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4) A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Попробуем найти B^{-1} .

$$1) |B| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 10 = -1 \neq 0, \text{ поэтому обратная матрица существует.}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad M_{11} &= -3 & B_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = -3 \\ M_{12} &= 5 & B_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -5 \\ M_{21} &= 2 & B_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -2 \\ M_{22} &= -3 & B_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = -3. \end{aligned}$$

$$3) \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}^T = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$4) B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \tilde{B}^T = -1 \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно найти X .

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ 12 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 + 45 & -14 + 27 \\ 36 - 70 & 24 - 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}.$

Задача 7.3. Найти неизвестную матрицу X из уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Введем обозначения: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} = B.$

Тогда уравнение перепишется в виде $AX = B$. Предположим, что существует матрица A^{-1} . Умножим равенство

$$AX = B$$

слева на A^{-1} и получим

$$A^{-1}AX = B \Leftrightarrow EX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Откуда получаем, что $X = A^{-1}B$.

Попробуем найти A^{-1} .

1) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 16 + 9 + 12 - 4 - 0 = 1 \neq 0$, поэтому обратная матрица существует.

2) $M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = -4$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 8 = 8 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -8$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7 \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = -7$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = 3$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 = 6 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 6$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = 5$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 6 = -2 \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = -2$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 9 = 5 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -5$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = -4$$

$$3) \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -8 & -7 \\ 3 & 6 & 5 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$4) A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T = 1 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно найти X .

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -4 + 30 - 20 & 12 + 6 - 14 & 0 + 21 - 16 \\ -8 + 60 - 50 & 24 + 12 - 35 & 0 + 42 - 40 \\ -7 + 50 - 40 & 21 + 10 - 28 & 0 + 35 - 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 7.4. Найти неизвестную матрицу X из уравнения

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\text{Введем обозначения: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = B.$$

Тогда уравнение переписывается в виде $XA = B$. Предположим, что существует матрица A^{-1} . Умножим равенство

$$XA = B$$

справа на A^{-1} и получим

$$XAA^{-1} = BA^{-1} \Leftrightarrow XE = BA^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1}.$$

Откуда получаем, что $X = BA^{-1}$.

Попробуем найти A^{-1} .

1) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 2 + 1 - 2 - 0 = 2 \neq 0$, поэтому обратная матрица существует.

2) $M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$ $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 1$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -2$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$ $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = -3$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$ $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = 0$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 2$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$ $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = 2$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1$ $A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = 1$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2$ $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -2$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$ $A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = -1$

3) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

4) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

Теперь можно найти X .

$$\begin{aligned}
X = BA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1+2-9 & 0-2+6 & 1+2-3 \\ 4-6-6 & 0+6+4 & 4-6-2 \\ 1+4-15 & 0-4+10 & 1+4-5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ -8 & 10 & -4 \\ -10 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\text{ОТВЕТ: } X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$