

Билет 19. Дифференциал. Инвариантность формы первого дифференциала

Понятие дифференциала числовой функции

Определение 19.1. Если числовая функция f дифференцируема в точке x , то ее *дифференциалом* $df(x)$ в этой точке называют однородную линейную функцию $f'(x)h$ (новой) независимой переменной h .

Таким образом,

$$df(x) = f'(x)h \quad (1)$$

Положив в формуле (1) $f(x) = x$, получим

$$dx = 1 \cdot h = h, h \in \mathbb{R} \quad (2)$$

так что дифференциал dx функции $f(x) = x$ в каждой точке x есть тождественная функция.

Подставляя (2) в правую часть (1), получаем

$$df(x) = f'(x) dx \quad (3)$$

равенство двух линейных функций $df(x)$ и $f'(x) dx$. Из него следует, что часто используемое обозначение производной $\frac{df}{dx}$ можно рассматривать, как отношение дифференциалов $df(x)$ и dx .

Функция $df(x)$ определена для всех действительных значений h . Однако по традиции часто рассматривают $df(x)$ лишь на множестве тех h , для которых $x + h$ принадлежит области определения функции; т.е., лишь на множестве приращений аргумента x функции f . Это объясняется тем, что дифференциал тесно связан с приращением функции. Так как, по предположению, f дифференцируема в точке x , то

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad (4)$$

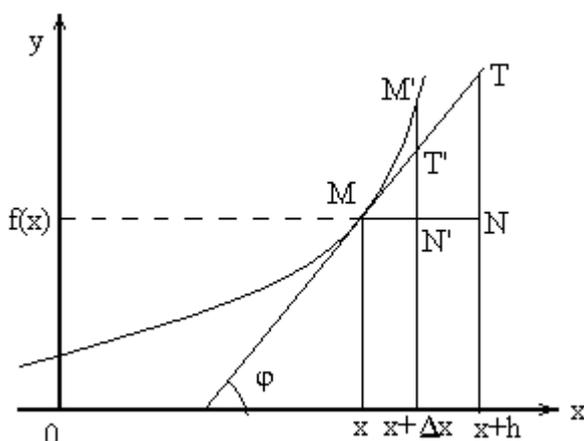
где $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и первое слагаемое в правой части (4) – дифференциал, но рассматриваемый только для $h = \Delta x$. Если $f'(x) \neq 0$, то

$\alpha(\Delta x)\Delta x = \bar{\bar{0}}(f'(x)\Delta x), \Delta x \rightarrow 0$, поэтому говорят, что «дифференциал есть главная линейная часть приращения функции».

Геометрический и механический смысл дифференциала.

Пусть числовая функция f дифференцируема в точке x . Как известно, ее график имеет в точке $M(x, f(x))$ касательную с угловым коэффициентом $f'(x)$.

Теорема 19.1. *Значение $df(x) = f'(x)h$ дифференциала равно приращению ординаты этой касательной при переходе от x к $x + h$ (см. рис.).*



Доказательство. Действительно, $\operatorname{tg} \varphi = f'(x), MN = h$, поэтому $NT = MN \operatorname{tg} \varphi = f'(x)h$. Из рисунка также видно, что $f'(x)\Delta x = N'T'$ есть часть приращения $f(x + \Delta x) - f(x) = N'M'$ функции, стремящееся к совпадению с ним при $\Delta x \rightarrow 0$.

Дифференциал допускает и **механическое** толкование. Если x – время, а $f(x)$ – путь, пройденный прямолинейно движущейся точкой к моменту x , то $f'(x)$ – ее скорость в данный момент. Тогда $f'(x)h$ равен длине пути, который прошла бы точка за промежуток времени от x до $x + h$, если бы ее скорость оставалась неизменной (т.е. приложенные силы уравновесились).

Инвариантность формы первого дифференциала

Правило дифференцирования сложной функции приведет нас к одному замечательному и важному свойству дифференциала.

Пусть функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ таковы, что из них может быть составлена сложная функция: $y = f(\varphi(t))$. Если существуют производные y'_x и x'_t , то по теореме **18.2** существует и производная

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t \quad (5)$$

Дифференциал dy , если x считать независимой переменной, выразится по формуле (3). Перейдём теперь к независимой переменной t ; в этом предположении имеем другое выражение для дифференциала:

$$dy = y'_t \cdot dt.$$

Заменяя производную y'_t её выражением (5) и замечая, что $x'_t \cdot dt$ есть дифференциал x как функции от t , окончательно получим:

$$dy = y'_x \cdot x'_t dt = y'_x \cdot dx,$$

т. е. вернёмся к прежней форме дифференциала.

Таким образом, мы видим, что форма дифференциала может быть сохранена даже в том случае, если прежняя независимая переменная заменена новой.

Мы всегда имеем право писать дифференциал y как в форме (1), будет ли x независимой переменной или нет; разница лишь в том, что, если за независимую переменную выбрано t , то dx означает не произвольное приращение Δx , а дифференциал x как функции от t . Это свойство и называют **инвариантностью формы дифференциала**.

Дифференциал суммы, произведения и частного функций.

В силу равенства (1) из любой формулы для производной в точке x при умножении на dx получается соответствующая формула для дифференциала. В частности, в точках, где функции u , v удовлетворяют условиям теорем о дифференцируемости суммы, произведения или частного получаем:

$$d(u + v) = du + dv$$

аналогично, $d(uv) = v du + u dv$, $d(u / v) = (v du - u dv) / v^2$.